Ueber die Differentialrelationen zwischen den Thetafunktionen eines Arguments.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

Hohen philosophischen Fakultät

der

vereinigten Friedrichs-Universität zu Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Alfred Baruch
aus Berlin.

Halle a. S.
1910.

Referent: Herr Geheimrat Prof. Dr. G. Cantor.

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei von W. Fr. Kaestner in Göttingen.

Meinen lieben Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544723_0102

Einleitung.

In der von Borchardt im Auftrage Jacobi's ausgearbeiteten Vorlesung: *„Theorie der elliptischen Funktionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet"* (Jacobi, Ges. W. I, 497—538) teilt Jacobi für die zweite logarithmische Ableitung von $\vartheta(x)$ eine Formel mit, die zeigt, daß sich die zweiten logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen rational durch die Quotienten zweier Thetas selbst darstellen lassen.

Definiere ich mit Jacobi (Ges. W. I, 501) die Thetafunktionen durch die Reihen

$$(1)\quad \begin{cases} \vartheta(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nix} = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots \\ \vartheta_1(x) = -\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} i^{2n+1} q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} e^{(2n+1)ix} = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \cdots \\ \vartheta_2(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} e^{(2n+1)ix} = 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \cdots \\ \vartheta_3(x) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2nix} = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \cdots \end{cases}$$

und bezeichne, wie üblich, mit c_ν, $c_\nu^{(\lambda)}$ die Werte von bzw. $\vartheta_\nu(x)$, $\vartheta_\nu^{(\lambda)}(x)$ ($\nu = 0,1,2,3$)[1]) für das Argument Null, dann läßt sich die von Jacobi für die zweite logarithmische Ableitung gefundene Darstellung so schreiben:

$$\frac{d^2 \ln \vartheta(x)}{dx^2} = \frac{c''}{c} - \frac{c_1'^2}{c^2}\frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}.$$

Dieser Formel treten entsprechende für die anderen Thetas an die Seite, wenn man von den Verwandlungsformeln (Jacobi, Ges. W. I, 502; vgl. auch Weierstraß-Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, S. 44) Gebrauch macht:

---

1) Dabei denke ich mir $\vartheta(x)$ ohne Index mit dem Index Null behaftet.

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llll} \vartheta(x+\frac{1}{2}\pi) = \vartheta_3(x) & \vartheta(x+\frac{1}{2}i\ln q) = -if.\vartheta_1(x) & \vartheta(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}i\ln q) = f.\vartheta_2(x) \\ \vartheta_1(x+\frac{1}{2}\pi) = \vartheta_2(x) & \vartheta_1(x+\frac{1}{2}i\ln q) = -if.\vartheta(x) & \vartheta_1(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}i\ln q) = f.\vartheta_3(x) \\ \vartheta_2(x+\frac{1}{2}\pi) = -\vartheta_1(x) & \vartheta_2(x+\frac{1}{2}i\ln q) = f.\vartheta_3(x) & \vartheta_2(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}i\ln q) = if.\vartheta(x) \\ \vartheta_3(x+\frac{1}{2}\pi) = \vartheta(x) & \vartheta_3(x+\frac{1}{2}i\ln q) = f.\vartheta_2(x) & \vartheta_3(x+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}i\ln q) = -if.\vartheta_1(x), \end{array}\right.$$

wo

$$f = q^{-\frac{1}{4}}e^{x}.$$

Ferner gehen aus diesen Darstellungen zahlreiche neue hervor, wenn die ebenfalls von Jacobi erkannten algebraischen Beziehungen unter den Thetas

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} c_3^2\vartheta_3^2(x) = c^2\vartheta^2(x) + c_2^2\vartheta_2^2(x) & c_3^2\vartheta^2(x) = c^2\vartheta_3^2(x) + c_2^2\vartheta_1^2(x) \\ c_3^2\vartheta_2^2(x) = c_2^2\vartheta_3^2(x) - c^2\vartheta_1^2(x) & c_3^2\vartheta_1^2(x) = c_2^2\vartheta^2(x) - c^2\vartheta_2^2(x) \end{array}\right.$$

beachtet werden.

Aus der fundamentalen Eigenschaft der ϑ-Funktionen, daß sich die Ableitungen der Quotienten zweier Thetas wieder rational durch Thetaquotienten ausdrücken lassen (vgl. Jacobi, Ges. W. I, 515), einer Eigenschaft, die in folgenden Formeln zum Ausdruck kommt:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{llll} \frac{d}{dx}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_h(x)} = c_h^2\frac{\vartheta_i(x)}{\vartheta_h(x)}\cdot\frac{\vartheta_k(x)}{\vartheta_h(x)}, & \frac{d}{dx}\frac{\vartheta_h(x)}{\vartheta_i(x)} = (-1)^{k+1}c_k^2\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_i(x)}\cdot\frac{\vartheta_k(x)}{\vartheta_i(x)}, & \left(\begin{array}{c} h,i,k = \\ \end{array}\begin{array}{c} 0,2,3 \\ 2,3,0 \\ 3,0,2 \end{array}\right), \\ \frac{d}{dx}\frac{\vartheta_h(x)}{\vartheta_1(x)} = -c_h^2\frac{\vartheta_i(x)}{\vartheta_1(x)}\cdot\frac{\vartheta_k(x)}{\vartheta_1(x)}, & \frac{d}{dx}\frac{\vartheta_i(x)}{\vartheta_h(x)} = (-1)^k\ c_k^2\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_h(x)}\cdot\frac{\vartheta_k(x)}{\vartheta_h(x)}, & \end{array}\right.$$

folgt die Erkenntnis, daß sich nicht nur die zweiten logarithmischen Ableitungen, sondern auch die sämtlichen höheren logarithmischen Ableitungen der ϑ-Funktionen rational durch Thetaquotienten ausdrücken lassen. Bis zur fünften Ordnung hat Herr Bertolani[1]) Darstellungen für die logarithmischen Ableitungen der ϑ-Funktionen gegeben, und bis zur sechsten finden sich die entsprechenden Formeln bei M. Krause[2]), ohne daß jedoch das allgemeine Gesetz der Entwicklungskoeffizienten aufgestellt ist. Ueberhaupt scheinen für die m-ten logarithmischen Ableitungen ($m > 6$) Darstellungen in der Literatur nicht vorhanden zu sein; und es soll zum Gegenstand der vorliegenden Untersuchung gehören, die allgemeinen Ausdrücke der $(2n)$-ten und $(2n+1)$-ten logarithmischen Ableitungen vermittels der Thetas selber aufzustellen.

Im Zusammenhang damit stehen die Relationen, die für das Argument Null zwischen den ϑ-Funktionen und ihren Ableitungen bestehen. Ich will derartige Relationen, wie üblich, kurz als Nullrelationen bezeichnen. Die beiden bekanntesten

$$(5)\quad c_3^4 = c^4 + c_2^4 \quad \text{und} \quad (6)\quad c_1' = cc_2c_3$$

gehen auf Jacobi zurück; eine andere

---

1) Giornale di matematiche **33**, 141, 1895.

2) Ber. d. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, **41**, 349, 1889.

$$(7) \qquad \frac{c_1'''}{c_1'} = \frac{c''}{c} + \frac{c_2''}{c_2} + \frac{c_3''}{c_3},$$

ist mehrfach, zuerst wohl von Herrn Königsberger[1]) in der Literatur behandelt worden[2]). Endlich hat Herr Pascal in einer Arbeit „*Sopra due relazioni rimarchevoli fra i valori delle derivate delle funzioni ϑ ellittiche per argomento zero*“[3]) für die fünfte und siebente Ableitung die Nullrelationen

$$(8) \qquad -3\frac{c_1^{\mathrm{V}}}{c_1'} + 5\frac{c_1'''^2}{c_1'^2} = c^8 + c_2^8 + c_3^8$$

$$(9) \qquad 9\frac{c_1^{\mathrm{VII}}}{c_1'} - 63\frac{c_1^{\mathrm{V}}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''}{c_1'} + 70\frac{c_1'''^3}{c_1'^3} = -8(c_2^4 + c_3^4)(c_3^4 + c^4)(c^4 - c_2^4)$$

gefunden, zu deren Beweise er noch Nullrelationen für die zweiten, vierten und sechsten Ableitungen der geraden Thetas gebraucht, die ihrerseits aus den von Herrn Bertolani[4]) aufgestellten Entwicklungen der logarithmischen Ableitungen der Thetas mit beliebigem Argument gewonnen werden.

Ein zweiter Gegenstand meiner Untersuchung soll es sein, die bereits vorliegenden Resultate über Nullrelationen der Thetas auf Ableitungen beliebig hoher Ordnung zu verallgemeinern.

Ich lasse jetzt eine nähere Inhaltsübersicht folgen. Die Untersuchung zerfällt in zwei Teile. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Darstellung der m-ten logarithmischen Ableitungen der Thetas durch Thetaquotienten. Dabei wird die durch die Natur der Aufgabe gegebene und auch von den Herren Pascal und Bertolani befolgte Methode der sukzessiven Differentiation nach der Variabeln x eingeschlagen.

In Nr. **1** wird die zweite und dritte, in Nr. **2** die vierte und fünfte, in Nr. **3** die sechste und siebente, in Nr. **4** die achte und neunte logarithmische Ableitung behandelt. Ich habe es mir angelegen sein lassen, für die einzelnen Ableitungen verschiedene Darstellungen zu gewinnen, um so den praktischen Gebrauch der Formeln zu erleichtern. Die Nr. **5** gibt dann die Verallgemeinerung auf logarithmische Ableitungen beliebiger Ordnung. Die m-ten logarithmischen Ableitungen stellen sich dar als Summen, die nach Potenzen von Thetaquotienten fortschreiten. Der Nenner der Thetaquotienten wird von derjenigen Thetafunktion gebildet, deren m-te logarithmische Ableitung entwickelt werden soll, in den Zähler kann jedes der drei übrigen Thetas treten. Dies führt zu drei gesonderten Darstellungen des allgemeinen Falles, die in den Nrn.

---

1) Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen, I, 381, Leipzig 1874, B. G. Teubner.

2) Vgl. Halphen, Traité des fonctions elliptiques I, 257, Paris 1886, Gauthier-Villars. — H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, Braunschweig 1891, Vieweg & Sohn. — Frobenius, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **98**, 247, 1885. — Caspary, Journ. de math. (4), **6**, 381, 1890.

3) Ann. di mat. (2), **24**, 24, 1896.

4) Giorn. di mat. **33**, 141, 1895.

6—8 ihre Erledigung finden, indem für die in den Summen auftretenden Koeffizienten Rekursionsformeln aufgestellt werden.

Der zweite Teil wendet sich den Nullrelationen zwischen den Thetas und ihren m-ten Ableitungen zu. Hier erscheint eine Zweiteilung geboten: zunächst werden die geraden Thetafunktionen betrachtet und darauf $\vartheta_1(x)$. Bei jenen verschwinden für $x = 0$ die Ableitungen ungerader Ordnung, und es ergeben sich Nullrelationen zwischen den geraden Thetas und ihren Ableitungen $(2n)$-ter Ordnung; bei $\vartheta_1(x)$ verschwinden für $x = 0$ die Ableitungen gerader Ordnung, und es ergeben sich Nullrelationen zwischen $\vartheta_1(x)$ und seinen Ableitungen $(2n+1)$-ter Ordnung. Die Methode, nach der diese Relationen hergeleitet werden, ist durchaus verschieden von der durch die Herren Pascal, Martin Krause[1]) und Burkhardt[2]) befolgten.

In Nr. **9** werden die von Herrn Pascal a. a. O. mitgeteilten Nullrelationen für die zweiten, vierten und sechsten Ableitungen der geraden Thetas zusammengestellt; durch Spezialisierung der Formeln für die achten und zehnten logarithmischen Ableitungen der Thetas mit beliebigem Argument werden Nullrelationen für die achten und zehnten Ableitungen der geraden Thetas gewonnen. Es zeigt sich indessen, daß man gar nicht nötig hat, von den logarithmischen Ableitungen der Thetas für beliebiges Argument auszugehen, man kann die Nullrelationen für die höheren Ableitungen der geraden Thetas direkt gewinnen, wenn man einmal die Nullrelationen für die vierten Ableitungen kennt. Diese Methode wird in Nr. **10** entwickelt und zur Ableitung der in der vorigen Nr. aufgestellten Relationen ($m = 8, 10$) angewendet. Mit Nr. **11** wende ich mich der Behandlung des allgemeinen Falles zu. Es werden für die $(2n)$-ten Ableitungen der geraden Thetas Nullrelationen aufgestellt und für die in den Entwicklungen auftretenden Koeffizienten Rekursionsformeln abgeleitet (Nr. **12**). Nr. **13** enthält eine Zusammenfassung der Resultate und die Zahlenwerte der Koeffizienten bis $m = 20$.

Darauf gehe ich zu der entsprechenden Betrachtung von $\vartheta_1(x)$ über. Hier tritt der besondere Umstand ein, daß sich aus den Formeln für die m-ten logarithmischen Ableitungen von $\vartheta_1(x)$ bei beliebigem Argument durch Spezialisierung keine Nullrelationen für die Ableitungen von $\vartheta_1(x)$ ergeben. Man ist also auf eine andere Art der Ableitung angewiesen. Die Methode, die Herr Pascal a. a. O. einschlägt, wird in Nr. **14** dargelegt, erweist sich jedoch für $m > 7$ als wenig praktisch. Dagegen führt die Methode, die in Nr. **10** mit Nutzen zur Ableitung von Nullrelationen angewendet worden ist, auch hier bequem zum Ziel. Nachdem in Nr. **15** mit ihrer Hilfe die Nullrelationen für die neunte und elfte Ableitung von $\vartheta_1(x)$ hergeleitet worden sind, bringen die Nrn. **16** und **17** die Aufstellung der allgemeinen Nullrelation für die $(2n+1)$-te Ableitung von $\vartheta_1(x)$ und liefern für die in den Entwicklungen auftretenden Koeffizienten

---

1) Theorie der doppeltperiodischen Funktionen. Leipzig 1895, B. G. Teubner. I. Teil, S. 140.
2) Theorie der elliptischen Funktionen. 2. Aufl. Leipzig 1906, B. G. Teubner. S. 145.

Rekursionsformeln. Endlich werden in Nr. **18** die gewonnenen Resultate zusammengestellt und die Zahlenwerte der Koeffizienten bis $m = 19$ angegeben.

Zum Schluß sei es mir gestattet, den Herren Professoren Krause und Pascal für ihr Interesse an der Arbeit meinen ergebensten Dank auszusprechen; zu ganz besonderem Danke bin ich jedoch meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Jahnke verpflichtet, dem ich die Anregung zu der Arbeit verdanke, und der mir in liebenswürdigster Weise seinen Rat und seine Unterstützung hat zuteil werden lassen.

I. Teil.

Darstellungen der logarithmischen Ableitungen beliebiger Ordnung der Thetafunktionen durch die Thetafunktionen selbst.

1. Die logarithmischen Ableitungen zweiter und dritter Ordnung. — Fügt man zu der von Jacobi aufgestellten Formel für die zweite logarithmische Ableitung von $\vartheta(x)$ die analogen Formeln für $\vartheta_\nu(x)$, $(\nu = 1, 2, 3)$ hinzu, indem man von den Verwandlungsformeln (2) der Thetas Gebrauch macht, so erhält man das Formelsystem

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^2 \ln \vartheta_\varkappa(x)}{dx^2} = \frac{c''}{c} - \frac{c_1'^2}{c^2} \frac{\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\varkappa^2(x)} \qquad (\varkappa, \lambda = 0,1;\ 1,0;\ 2,3;\ 3,2).$$

Diesem Formelsystem treten zwei weitere an die Seite, wenn man bedenkt, daß aus den algebraischen Beziehungen (3) zwischen den Thetas folgt

$$\text{(10)} \qquad \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} = \frac{c_2^2}{c_3^2} - \frac{c^2}{c_3^2} \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)}, \qquad \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} = \frac{c_3^2}{c_2^2} - \frac{c^2}{c_2^2} \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)}.$$

Setzt man nämlich diese Ausdrücke in die erste Formel von (I) ein und wendet die Relation (6) an, so erhält man

$$\frac{d^2 \ln \vartheta(x)}{dx^2} = \frac{c''}{c} - c_2^4 + \frac{c_1'^2}{c_3^2} \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d^2 \ln \vartheta(x)}{dx^2} = \frac{c''}{c} - c_3^4 + \frac{c_1'^2}{c_2^2} \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)}.$$

Nun bestehen aber die Formeln

$$\text{(11)} \qquad \frac{c_3''}{c_3} - \frac{c_2''}{c_2} = c^4, \qquad \frac{c''}{c} - \frac{c_3''}{c_3} = c_2^4, \qquad \frac{c_2''}{c_2} - \frac{c''}{c} = -c_3^4,$$

die aus den Formeln (4) für die Ableitungen der Thetaquotienten durch nochmalige Differentiation und Nullsetzen des Argumentes hervorgehen. Demnach haben die andern beiden Systeme für die 2^{ten} logarithmischen Ableitungen der

ϑ-Funktionen die Gestalt

$$(I') \quad \frac{d^2 \ln \vartheta_\varkappa(x)}{dx^2} = \frac{c_3''}{c_3} - \varepsilon \frac{c_1'^2}{c_3^2} \frac{\vartheta_\mu^2(x)}{\vartheta_\varkappa^2(x)} \qquad (\varkappa, \mu = 0, 2; 1, 3; 2, 0; 3, 1) \begin{pmatrix} \varepsilon = +1, & \varkappa = 1, 2 \\ \varepsilon = -1, & \varkappa = 0, 3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$(I'') \quad \frac{d^2 \ln \vartheta_\varkappa(x)}{dx^2} = \frac{c_2''}{c_2} - \varepsilon \frac{c_1'^2}{c_2^2} \frac{\vartheta_\nu^2(x)}{\vartheta_\varkappa^2(x)} \qquad (\varkappa, \nu = 0, 3; 1, 2; 2, 1; 3, 0) \begin{pmatrix} \varepsilon = +1, & \varkappa = 1, 2 \\ \varepsilon = -1, & \varkappa = 0, 3 \end{pmatrix}.$$

Ich will noch auf eine andere Art die 2^{ten} logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen durch Thetaquotienten ausdrücken. Schreibe ich die erste Formel von (I) in der Form

$$\frac{d^2 \ln \vartheta(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2 \vartheta^2(x)} [cc'' \vartheta^2(x) - c_1'^2 \vartheta_1^2(x)],$$

drücke innerhalb der eckigen Klammer sowohl $\vartheta^2(x)$ als $\vartheta_1^2(x)$ durch $\vartheta_2^2(x)$ und $\vartheta_3^2(x)$ aus und benutze wieder die Gleichungen (11), so erhalte ich mit Herrn Jahnke[1])

$$(II) \quad \frac{d^2 \ln \vartheta(x)}{dx^2} = -\frac{c_2 c_2''}{c^2} \cdot \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} + \frac{c_3 c_3''}{c^2} \cdot \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)}.$$

Auf analoge Weise erhalte ich aus der ersten Formel von (I') bzw. (I'')

$$(II') \quad \frac{d^2 \ln \vartheta(x)}{dx^2} = \frac{c c''}{c_3^2} \cdot \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + \frac{c_2 c_2''}{c_3^2} \cdot \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}$$

bzw.

$$(II'') \quad \frac{d^2 \ln \vartheta(x)}{dx^2} = \frac{c_3 c_3''}{c_2^2} \cdot \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + \frac{c c''}{c_2^2} \cdot \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)}.$$

Diesen Formeln treten noch je drei weitere an die Seite, die vermittels der Verwandlungsformeln (2) gewonnen werden.

Für die dritten logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen hat Herr Bertolani[2]) folgende Darstellung gegeben

$$(III) \quad \frac{d^3 \ln \vartheta_\varkappa(x)}{dx^3} = (-1)^{\varkappa+1} \cdot 2 c_1'^2 \frac{\vartheta_\lambda(x)}{\vartheta_\varkappa(x)} \cdot \frac{\vartheta_\mu(x)}{\vartheta_\varkappa(x)} \cdot \frac{\vartheta_\nu(x)}{\vartheta_\varkappa(x)}, \quad \begin{pmatrix} \varkappa, \lambda, \mu, \nu = & 0, 1, 2, 3; & 1, 2, 3, 0 \\ & 2, 3, 0, 1; & 3, 0, 1, 2 \end{pmatrix}.$$

2. Die logarithmischen Ableitungen vierter und fünfter Ordnung. — Darstellungen der vierten logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen erhält man aus denen für die dritten logarithmischen Ableitungen durch nochmalige Differentiation nach x. Wählt man die Formeln (III) als Ausgangspunkt, so stellen sich die vierten logarithmischen Ableitungen folgendermaßen dar:

---

1) Vgl. Archiv der Mathematik und Physik (3) **16**, 81, Aufgabe **298**.

2) Giorn. di mat. **33**, 141, 1896.

$$(\mathrm{IV})\quad \begin{cases} \dfrac{d^4 \ln \vartheta_\varkappa(x)}{dx^4} = (-1)^{\varkappa+1}\cdot 2c_1'^2 c_\varkappa^2 \dfrac{\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\varkappa^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_\mu^2(x)}{\vartheta_\varkappa^2(x)} + (-1)^{\lambda}\cdot 2c_1'^2 c_\mu^2 \dfrac{\vartheta_\mu^2(x)}{\vartheta_\varkappa^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta_\varkappa^2(x)} + \\ \qquad\qquad + (-1)^{\mu+1}\cdot 2c_1'^2 c_\lambda^2 \dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta_\varkappa^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_\lambda^2(x)}{\vartheta_\varkappa^2(x)} \qquad \begin{pmatrix}\varkappa,\lambda,\mu = 0,2,3\\ 2,3,0\\ 3,0,2\end{pmatrix} \\ \dfrac{d^4 \ln \vartheta_1(x)}{dx^4} = -2c_1'^2 c^2 \dfrac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta_1^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta_1^2(x)} - 2c_1'^2 c_2^2 \dfrac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta_1^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta^2(x)}{\vartheta_1^2(x)} - 2c_1'^2 c_3^2 \dfrac{\vartheta^2(x)}{\vartheta_1^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta_1^2(x)}. \end{cases}$$

Bei diesen Formeln treten auf der rechten Seite drei Thetaquotienten auf. Vermöge der rationalen Beziehungen (3) kann man einen von ihnen eliminieren und wird so zu den Formeln

$$(\mathrm{V})\qquad \frac{d^4 \ln \vartheta(x)}{dx^4} = 2c_1'^2 c_3^2 \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 6c_1'^2 c^2 \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 2c_1'^2 c_2^2 \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)}$$

$$(\mathrm{V}')\qquad \frac{d^4 \ln \vartheta(x)}{dx^4} = 2c_1'^2 c^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 6c_1'^2 c_2^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 2c_1'^2 c_3^2 \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)}$$

$$(\mathrm{V}'')\qquad \frac{d^4 \ln \vartheta(x)}{dx^4} = -2c_1'^2 c_2^2 \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 6c_1'^2 c_3^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 2c_1'^2 c^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}$$

geführt, denen wieder je drei weitere für die anderen Thetas an die Seite treten.

Sieht man den Thetaquotienten $\frac{\vartheta_\varkappa(x)}{\vartheta_\lambda(x)}$, $(\varkappa \neq \lambda)$, als mit dem Grad 1 behaftet an, so sind die Formeln (IV) als homogene, (V), (V′), (V″) dagegen als unhomogene Darstellungen der vierten logarithmischen Ableitungen zu betrachten. Um letztere ebenfalls homogen zu machen, bediene ich mich der leicht zu beweisenden Identitäten

$$(16)\quad \begin{cases} c_1'^2 c_3^2 \dfrac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} + c_1'^2 c_2^2 \dfrac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} = -c_2^4 c_3^4 \dfrac{\vartheta_2^4(x)}{\vartheta^4(x)} + c_1'^2 c^2 \dfrac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + c_2^4 c_3^4 \dfrac{\vartheta_3^4(x)}{\vartheta^4(x)} \\ c_1'^2 c^2 \dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} - c_1'^2 c_3^2 \dfrac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} = c^4 c_3^4 \dfrac{\vartheta_1^4(x)}{\vartheta^4(x)} - c_1'^2 c_2^2 \dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} - c^4 c_3^4 \dfrac{\vartheta_2^4(x)}{\vartheta^4(x)} \\ c_1'^2 c^2 \dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + c_1'^2 c_2^2 \dfrac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} = c^4 c_2^4 \dfrac{\vartheta_1^4(x)}{\vartheta^4(x)} + c_1'^2 c_3^2 \dfrac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\dfrac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + c^4 c_2^4 \dfrac{\vartheta_3^4(x)}{\vartheta^4(x)}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke auf der linken Seite kommen gerade in den Formeln (V), (V′), (V″) vor, sodaß diese übergehen in

$$(\mathrm{VI})\qquad \frac{d^4 \ln \vartheta(x)}{dx^4} = -2c_2^4 c_3^4 \frac{\vartheta_2^4(x)}{\vartheta^4(x)} - 4c_1'^2 c^2 \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 2c_2^4 c_3^4 \frac{\vartheta_3^4(x)}{\vartheta^4(x)}$$

$$(\mathrm{VI}')\qquad \frac{d^4 \ln \vartheta(x)}{dx^4} = 2c^4 c_3^4 \frac{\vartheta_1^4(x)}{\vartheta^4(x)} + 4c_1'^2 c_2^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 2c^4 c_3^4 \frac{\vartheta_2^4(x)}{\vartheta^4(x)}$$

$$(\mathrm{VI}'')\qquad \frac{d^4 \ln \vartheta(x)}{dx^4} = -2c^4 c_2^4 \frac{\vartheta_3^4(x)}{\vartheta^4(x)} + 4c_1'^2 c_3^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}\cdot\frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 2c^4 c_2^4 \frac{\vartheta_1^4(x)}{\vartheta^4(x)}.$$

Eliminiert man in den Formeln (IV) nicht nur einen, sondern zwei Thetaquotienten, so kommt man zu Darstellungen der vierten logarithmischen Ab-

leitungen der Thetas, bei denen nur ein Thetaquotient auftritt. Die sich auf $\vartheta(x)$ beziehenden Ausdrücke lauten

$$\text{(VII)} \qquad \frac{d^4 \ln \vartheta(x)}{dx^4} = -2c_2^4 c_3^4 + 4c_2^2 c_3^2 (c_2^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 6c_2^4 c_3^4 \frac{\vartheta_1^4(x)}{\vartheta^4(x)}$$

$$\text{(VII')} \qquad \frac{d^4 \ln \vartheta(x)}{dx^4} = 2c^4 c_2^4 - 4c^2 c_2^2 (c^4 - c_2^4) \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 6c^4 c_2^4 \frac{\vartheta_2^4(x)}{\vartheta^4(x)}$$

$$\text{(VII'')} \qquad \frac{d^4 \ln \vartheta(x)}{dx^4} = -2c^4 c_3^4 + 4c^2 c_3^2 (c^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 6c^4 c_3^4 \frac{\vartheta_3^4(x)}{\vartheta^4(x)}.$$

In dieser Form sind die vierten logarithmischen Ableitungen bereits von den Herren Krause[1]) und Bertolani[2]) dargestellt worden.

Ich gehe nunmehr zur fünften logarithmischen Ableitung über. Aus den Formeln (VII), (VII'), (VII'') erhält man sofort durch Differentiation nach x die Darstellungen

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{d^5 \ln \vartheta(x)}{dx^5} = 8c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \cdot \left[c_2^4 + c_3^4 - 3c_2^2 c_3^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} \right]$$

$$\text{(VIII')} \qquad \frac{d^5 \ln \vartheta(x)}{dx^5} = 8c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \cdot \left[c^4 - c_2^4 + 3c^2 c_2^2 \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} \right]$$

$$\text{(VIII'')} \qquad \frac{d^5 \ln \vartheta(x)}{dx^5} = -8c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \cdot \left[c^4 + c_3^4 - 3c^2 c_3^2 \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} \right],$$

die zum Teil auch Herr Bertolani mitgeteilt hat. Eine andere Darstellung ergibt sich, wenn man diese Formeln addiert. Man bekommt so

$$\text{(IX)} \qquad \frac{d^5 \ln \vartheta(x)}{dx^5} = 8c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \cdot \left[-c_2^2 c_3^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + c^2 c_2^2 \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} + c^2 c_3^2 \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} \right],$$

wo die rechte Seite in dem oben erklärten Sinne homogen ist.

3. Die logarithmischen Ableitungen sechster und siebenter Ordnung. — Zur Bildung der sechsten logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen gehe ich aus von der Formel (VIII), differentiiere nach x und drücke sodann auf der rechten Seite alles bzw. durch $\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}$, $\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}$, $\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$ aus. Ich erhalte auf diese Weise drei Darstellungen der sechsten logarithmischen Ableitungen, nämlich[3])

---

1) A. a. O. 349. Allerdings ist die Darstellung nicht durch Thetafunktionen, sondern durch die Jacobische elliptische Funktion $\mathrm{sn}\, u$ gegeben.

2) A. a. O. 141, wo sie jedoch durch einen Druckfehler entstellt sind.

3) Formel (X) befindet sich auch noch bei Herrn Krause. Vgl. hierzu Anm. 1).

$$\text{(X)}\qquad \frac{d^6 \ln \vartheta(x)}{dx^6} = 8 c_2^2 c_3^2 \Big[c_2^2 c_3^2 (c_2^4 + c_3^4) - (2 c_2^8 + 13 c_2^4 c_3^4 + 2 c_3^8) \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 15 c_2^2 c_3^2 (c_2^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_1^4(x)}{\vartheta^4(x)} - 15 c_2^4 c_3^4 \frac{\vartheta_1^6(x)}{\vartheta^6(x)} \Big]$$

$$\text{(X')}\qquad \frac{d^6 \ln \vartheta(x)}{dx^6} = -8 c^2 c_2^2 \Big[c^2 c_2^2 (c^4 - c_2^4) - (2 c^8 - 13 c^4 c_2^4 + 2 c_2^8) \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 15 c^2 c_2^2 (c^4 - c_2^4) \frac{\vartheta_2^4(x)}{\vartheta^4(x)} - 15 c^4 c_2^4 \frac{\vartheta_2^6(x)}{\vartheta^6(x)} \Big]$$

$$\text{(X'')}\qquad \frac{d^6 \ln \vartheta(x)}{dx^6} = -8 c^2 c_3^2 \Big[c^2 c_3^2 (c^4 + c_3^4) - (2 c^8 + 13 c^4 c_3^4 + 2 c_3^8) \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 15 c^2 c_3^2 (c^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_3^4(x)}{\vartheta^4(x)} - 15 c^4 c_3^4 \frac{\vartheta_3^6(x)}{\vartheta^6(x)} \Big].$$

Diesen will ich noch eine weitere hinzufügen, wo alle drei Thetaquotienten vorkommen; sie zeichnet sich durch die einfache Form der auftretenden Konstanten aus.

Ich gehe aus von (IX), setze

$$u = 8 c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}, \qquad v = -c_2^2 c_3^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + c^2 c_2^2 \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} + c^2 c_3^2 \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)}$$

und bilde die Ableitung nach x. Es ist

$$\frac{du}{dx} = 8 c_1'^2 c^2 \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 8 c_1'^2 c_3^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 8 c_1'^2 c_2^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)},$$

$$\frac{dv}{dx} = -6 c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$$

und demnach, wenn man noch beachtet, daß für v auch die Ausdrücke

$$v = -3 c_2^2 c_3^2 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + (c_2^4 + c_3^4) = 3 c^2 c_2^2 \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} + (c^4 - c_2^4) = 3 c^2 c_3^2 \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} - (c^4 + c_3^4)$$

bestehen,

$$\frac{d^6 \ln \vartheta(x)}{dx^6} = -120 c_1'^4 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 8 c_1'^2 c^2 (c_2^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 8 c_1'^2 c_3^2 (c^4 - c_2^4) \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 8 c_1'^2 c_2^2 (c^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)}.$$

Man erkennt nun unschwer, daß die drei letzten Glieder dieser Gleichung in die Form

$$-8 c_1'^2 c^6 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 8 c_1'^2 c_3^6 \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 8 c_1'^2 c_2^6 \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)}$$

gebracht werden können, sodaß man erhält:

$$\text{(XI)}\qquad \frac{d^6 \ln \vartheta(x)}{dx^6} = -120\, c_1'^4 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} - 8\, c_1'^2 c^6 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + \\ + 8\, c_1'^2 c_3^6 \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 8\, c_1'^2 c_2^6 \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)}.$$

Ausgehend von den Formeln (X), (X'), (X''), gewinnt man durch weitere Differentiation nachfolgende drei Darstellungen der siebenten logarithmischen Ableitung:

$$\text{(XII)}\qquad \frac{d^7 \ln \vartheta(x)}{dx^7} = -16\, c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \cdot \Big[(2\, c_2^8 + 13\, c_2^4 c_3^4 + 2\, c_3^8) - \\ - 30\, c_2^2 c_3^2 (c_2^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 45\, c_2^4 c_3^4 \frac{\vartheta_1^4(x)}{\vartheta^4(x)}\Big]$$

$$\text{(XII')}\qquad \frac{d^7 \ln \vartheta(x)}{dx^7} = -16\, c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \cdot \Big[(2\, c^8 - 13\, c^4 c_2^4 + 2\, c_2^8) + \\ + 30\, c^2 c_2^2 (c^4 - c_2^4) \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 45\, c^4 c_2^4 \frac{\vartheta_2^4(x)}{\vartheta^4(x)}\Big]$$

$$\text{(XII'')}\qquad \frac{d^7 \ln \vartheta(x)}{dx^7} = -16\, c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \cdot \Big[(2\, c^8 + 13\, c^4 c_3^4 + 2\, c_3^8) - \\ - 30\, c^2 c_3^2 (c^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 45\, c^4 c_3^4 \frac{\vartheta_3^4(x)}{\vartheta^4(x)}\Big].$$

4. Die logarithmischen Ableitungen achter und neunter Ordnung. — Ich wende mich nunmehr den beiden nächsten Ableitungen zu. Da die Rechnungen stets dieselben sind, so beschränke ich mich darauf, die Resultate mitzuteilen.

Für die achte logarithmische Ableitung gelten die Darstellungen:

$$\text{(XIII)}\qquad \frac{d^8 \ln \vartheta(x)}{dx^8} = -16\, c_2^2 c_3^2 \Big[c_2^2 c_3^2 (2\, c_2^8 + 13\, c_2^4 c_3^4 + 2\, c_3^8) - 4\, (c_2^4 + c_3^4)(c_2^8 + 29\, c_2^4 c_3^4 + c_3^8) \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + \\ + 126\, c_2^2 c_3^2 (c_2^8 + 4\, c_2^4 c_3^4 + c_3^8) \frac{\vartheta_1^4(x)}{\vartheta^4(x)} - 420\, c_2^4 c_3^4 (c_2^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_1^6(x)}{\vartheta^6(x)} + 315\, c_2^6 c_3^6 \frac{\vartheta_1^8(x)}{\vartheta^8(x)}\Big]$$

$$\text{(XIII')}\qquad \frac{d^8 \ln \vartheta(x)}{dx^8} = 16\, c^2 c_2^2 \Big[c^2 c_2^2 (2\, c^8 - 13\, c^4 c_2^4 + 2\, c_2^8) - 4\, (c^4 - c_2^4)(c^8 - 29\, c^4 c_2^4 + c_2^8) \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} - \\ - 126\, c^2 c_2^2 (c^8 - 4\, c^4 c_2^4 + c_2^8) \frac{\vartheta_2^4(x)}{\vartheta^4(x)} - 420\, c^4 c_2^4 (c^4 - c_2^4) \frac{\vartheta_2^6(x)}{\vartheta^6(x)} - 315\, c^6 c_2^6 \frac{\vartheta_2^8(x)}{\vartheta^8(x)}\Big]$$

$$\text{(XIII'')}\qquad \frac{d^8 \ln \vartheta(x)}{dx^8} = -16\, c^2 c_3^2 \Big[c^2 c_3^2 (2\, c^8 + 13\, c^4 c_3^4 + 2\, c_3^8) - 4\, (c^4 + c_3^4)(c^8 + 29\, c^4 c_3^4 + c_3^8) \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + \\ + 126\, c^2 c_3^2 (c^8 + 4\, c^4 c_3^4 + c_3^8) \frac{\vartheta_3^4(x)}{\vartheta^4(x)} - 420\, c^4 c_3^4 (c^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_3^6(x)}{\vartheta^6(x)} + 315\, c^6 c_3^6 \frac{\vartheta_3^8(x)}{\vartheta^8(x)}\Big].$$

Für die neunte logarithmische Ableitung gelten die Darstellungen:

$$\text{(XIV)}\quad \frac{d^9 \ln \vartheta(x)}{dx^9} = 128\, c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \cdot \Big[(c_2^4 + c_3^4)(c_2^8 + 29\, c_2^4 c_3^4 + c_3^8) - 63\, c_2^2 c_3^2 (c_2^8 + 4\, c_2^4 c_3^4 + c_3^8) \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 315\, c_2^4 c_3^4 (c_2^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_1^4(x)}{\vartheta^4(x)} - 315\, c_2^6 c_3^6 \frac{\vartheta_1^6(x)}{\vartheta^6(x)} \Big]$$

$$\text{(XIV}')\quad \frac{d^9 \ln \vartheta(x)}{dx^9} = 128\, c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \cdot \Big[(c^4 - c_2^4)(c^8 - 29\, c^4 c_2^4 + c_2^8) + 63\, c^2 c_2^2 (c^8 - 4\, c^4 c_2^4 + c_2^8) \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 315\, c^4 c_2^4 (c^4 - c_2^4) \frac{\vartheta_2^4(x)}{\vartheta^4(x)} + 315\, c^6 c_2^6 \frac{\vartheta_2^6(x)}{\vartheta^6(x)} \Big]$$

$$\text{(XIV}'')\quad \frac{d^9 \ln \vartheta(x)}{dx^9} = -128\, c_1'^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \cdot \Big[(c^4 + c_3^4)(c^8 + 29\, c^4 c_3^4 + c_3^8) - 63\, c^2 c_3^2 (c^8 + 4\, c^4 c_3^4 + c_3^8) \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 315\, c^4 c_3^4 (c^4 + c_3^4) \frac{\vartheta_3^4(x)}{\vartheta^4(x)} - 315\, c^6 c_3^6 \frac{\vartheta_3^6(x)}{\vartheta^6(x)} \Big].$$

Allen diesen Formeln treten die entsprechenden für die anderen Thetafunktionen an die Seite, indem man von den Verwandlungsformeln (2) Gebrauch macht.

5. Die logarithmischen Ableitungen $(2n)$-ter und $(2n+1)$-ter Ordnung. — Im Vorhergehenden habe ich für die ersten neun logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen Entwicklungen nach Potenzen von Thetaquotienten gegeben. Ich wende mich nunmehr der allgemeineren Aufgabe zu, entsprechende Entwicklungen für die logarithmischen Ableitungen beliebiger Ordnung aufzustellen. Aus der Mannigfaltigkeit der möglichen Darstellungen wähle ich, wenn die Ableitungen von gerader Ordnung sind, diejenigen aus, bei denen Potenzen nur eines Thetaquotienten auftreten[1]). Je nach seiner Wahl gelangt man zu drei von einander verschiedenen Ausdrücken. Die Darstellungen der Ableitungen ungerader Ordnung ergeben sich aus ihnen durch nochmalige Differentiation nach x. Bei diesen tritt ebenfalls eine Reihe, fortschreitend nach Potenzen eines Thetaquotienten, auf, jedoch noch multipliziert mit dem Produkt aller drei Thetaquotienten[2]).

6. Erste Art der Darstellung der logarithmischen Ableitungen beliebiger Ordnung der Thetafunktionen. — Ich behaupte, die $(2n)$-te logarithmische Ableitung von $\vartheta(x)$ läßt sich darstellen in der Form

$$\text{(XV)}\qquad \frac{d^{2n} \ln \vartheta(x)}{dx^{2n}} = \sum_{p=0}^{n} A_p^{(2n)} \frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)},$$

wo die doppelten Indizes die Abhängigkeit der Koeffizienten von der Potenz des Thetaquotienten und der Ordnung der Ableitung kenntlich machen. Gesetzt, es wäre bereits bewiesen, daß für die $(2n-2)$-te logarithmische Ab-

1) Vgl. die Formeln (I), (VII), (X), (XIII).
2) Vgl. (III), (VIII), (XII), (XIV).

leitung die entsprechende Entwicklung besteht:

$$\frac{d^{2n-2}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n-2}} = \sum_{p=0}^{n-1} A_p^{(2n-2)} \frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)},$$

dann erhält man durch zweimalige Differentiation nach x aus dieser Gleichung

$$\frac{d^{2n-1}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n-1}} = 2c^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \cdot \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} \cdot \sum_{p=0}^{n-1} p A_p^{(2n-2)} \frac{\vartheta_1^{2p-2}(x)}{\vartheta^{2p-2}(x)},$$

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n}} = 4c^4 \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)} \cdot \sum_{p=0}^{n-1} p(p-1) A_p^{(2n-2)} \frac{\vartheta_1^{2p-4}(x)}{\vartheta^{2p-4}(x)} +$$

$$+ \left[2c_2^2c_3^2 - 4(c_2^4+c_3^4)\frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)} + 6c_2^2c_3^2\frac{\vartheta_1^4(x)}{\vartheta^4(x)}\right] \cdot \sum_{p=0}^{n-1} p A_p^{(2n-2)} \frac{\vartheta_1^{2p-2}(x)}{\vartheta^{2p-2}(x)}.$$

Drückt man mit Hilfe der Formeln (10) in der letzten Gleichung $\frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta^2(x)}$ und $\frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta^2(x)}$ ebenfalls durch $\frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}$ aus und faßt darauf Glieder gleich hoher Potenzen zusammen, so gewinnt man nach einer passenden Veränderung des Summationsbuchstaben die Relation

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n}} = \sum_{p=2}^{n} 2c_2^2c_3^2(p-1)(2p-1) A_{p-1}^{(2n-2)} \frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)} + \sum_{p=1}^{n-1} -4(c_2^4+c_3^4)p^2 A_p^{(2n-2)} \frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n-1} 2c_2^2c_3^2(p+1)(2p+1) A_{p+1}^{(2n-2)} \frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)}.$$

Wenn ich die Festsetzung treffe, daß

$$A_\varkappa^{(2\lambda)} = 0, \text{ falls } \varkappa < 0 \text{ oder } \varkappa > \lambda$$

ist, so kann die letzte Gleichung folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n}} = \sum_{p=0}^{n} [2(p+1)(2p+1)c_2^2c_3^2 A_p^{(2n-2)} - 4p^2(c_2^4+c_3^4) A_p^{(2n-2)} +$$

$$+ 2(p-1)(2p-1)c_2^2c_3^2 A_p^{(2n-2)}] \frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)}.$$

Damit ist aber bewiesen: Wenn für die $(2n-2)$-te logarithmische Ableitung eine Darstellung in der behaupteten Form besteht, so besteht eine solche auch für die $(2n)$-te Aleitung. Da nun tatsächlich in den Nrn. 1—4 derartige Darstellungen für $n < 5$ gegeben worden sind, so gilt die Entwicklung (XV) allgemein. Dehnt man das gewonnene Resultat auch auf die Ableitungen $(2n+1)$-ter Ordnung aus, indem man noch einmal nach x differentiiert, so kann man zusammenfassend sagen:

Die logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen lassen sich darstellen in der Form

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n}} = \sum_{p=0}^{n} A_p^{(2n)} \frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)}, \qquad \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n+1}} = 2c^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)A_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)}$$

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta_1(x)}{dx^{2n}} = \sum_{p=0}^{n} A_p^{(2n)} \frac{\vartheta^{2p}(x)}{\vartheta_1^{2p}(x)}, \qquad \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta_1(x)}{dx^{2n+1}} = -2c^2 \frac{\vartheta(x)}{\vartheta_1(x)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_1(x)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_1(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)A_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta^{2p}(x)}{\vartheta_1^{2p}(x)}$$

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta_2(x)}{dx^{2n}} = \sum_{p=0}^{n} A_p^{(2n)} \frac{\vartheta_3^{2p}(x)}{\vartheta_2^{2p}(x)}, \qquad \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta_2(x)}{dx^{2n+1}} = 2c^2 \frac{\vartheta(x)}{\vartheta_2(x)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(x)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_2(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)A_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta_3^{2p}(x)}{\vartheta_2^{2p}(x)}$$

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta_3(x)}{dx^{2n}} = \sum_{p=0}^{n} A_p^{(2n)} \frac{\vartheta_2^{2p}(x)}{\vartheta_3^{2p}(x)}, \qquad \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta_3(x)}{dx^{2n+1}} = -2c^2 \frac{\vartheta(x)}{\vartheta_3(x)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)A_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta_2^{2p}(x)}{\vartheta_3^{2p}(x)}.$$

Dabei gelten für die Koeffizienten die Rekursionsformeln

$$A_p^{(2n)} = 2(p+1)(2p+1)c_2^2c_3^2A_{p+1}^{(2n-2)} - 4p^2(c_2^4+c_3^4)A_p^{(2n-2)} + 2(p-1)(2p-1)c_2^2c_3^2A_{p-1}^{(2n-2)}$$

mit der Festsetzung

$$A_\varkappa^{(2\lambda)} = 0, \text{ wenn } \varkappa < 0 \text{ oder } \varkappa > \lambda.$$

Die Werte der Koeffizienten bis $n = 4$ sind

$$A_0^{(2)} = \frac{c''}{c}, \qquad A_0^{(6)} = 8c_2^4c_3^4(c_2^4+c_3^4), \qquad A_0^{(8)} = -16c_2^4c_3^4(2c_2^8+13c_2^4c_3^4+2c_3^8)$$

$$A_1^{(2)} = -c_2^2c_3^2, \qquad A_1^{(6)} = -8c_2^2c_3^2(2c_2^8+13c_2^4c_3^4+2c_3^8), \qquad A_1^{(8)} = 64c_2^2c_3^2(c_2^4+c_3^4)(c_2^8+29c_2^4c_3^4+c_3^8)$$

$$A_0^{(4)} = -2c_2^4c_3^4, \qquad A_2^{(6)} = 120c_2^4c_3^4(c_2^4+c_3^4), \qquad A_2^{(8)} = -2016c_2^4c_3^4(c_2^8+4c_2^4c_3^4+c_3^8)$$

$$A_1^{(4)} = 4c_2^2c_3^2(c_2^4+c_3^4), \qquad A_3^{(6)} = -120c_2^6c_3^6, \qquad A_3^{(8)} = 6720c_2^6c_3^6(c_2^4+c_3^4)$$

$$A_2^{(4)} = -6c_2^4c_3^4, \qquad A_4^{(8)} = -5040c_2^8c_3^8.$$

7. Zweite Art der Darstellung der logarithmischen Ableitungen beliebiger Ordnung der Thetafunktionen. — Im Hinblick auf die Formeln (I′), (VII′), (VIII′), (X′), (XII′), XIII′), (XIV′) wird man durch Rechnungen, die denen der vorigen Nr. ganz analog sind, zu folgendem Satz geführt:

Die logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen lassen sich darstellen in der Form:

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n}} = \sum_{p=0}^{n} B_p^{(2n)} \frac{\vartheta_2^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)}, \qquad \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n+1}} = -2c_3^2 \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)B_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta_2^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)}$$

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta_1(x)}{dx^{2n}} = \sum_{p=0}^{n}(-1)^pB_p^{(2n)} \frac{\vartheta_3^{2p}(x)}{\vartheta_1^{2p}(x)}, \qquad \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta_1(x)}{dx^{2n+1}} = 2c_3^2 \frac{\vartheta(x)}{\vartheta_1(x)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_1(x)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_1(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p(p+1)B_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta_3^{2p}(x)}{\vartheta_1^{2p}(x)}$$

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta_2(x)}{dx^{2n}} = \sum_{p=0}^{n}(-1)^pB_p^{(2n)} \frac{\vartheta^{2p}(x)}{\vartheta_2^{2p}(x)}, \qquad \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta_2(x)}{dx^{2n+1}} = -2c_3^2 \frac{\vartheta(x)}{\vartheta_2(x)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(x)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_2(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p(p+1)B_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta^{2p}(x)}{\vartheta_2^{2p}(x)}$$

$$\frac{d^{2n}\ln\vartheta_3(x)}{dx^{2n}} = \sum_{p=0}^{n} B_p^{(2n)} \frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta_3^{2p}(x)}, \qquad \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta_3(x)}{dx^{2n+1}} = 2c_3^2 \frac{\vartheta(x)}{\vartheta_3(x)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)B_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta_3^{2p}(x)}.$$

Dabei gelten für die Koeffizienten die Rekursionsformeln

$$B_p^{(2n)} = 2(p+1)(2p+1)c^2c_2^2B_{p+1}^{(2n-2)} - 4p^2(c^4-c_2^4)B_p^{(2n-2)} - 2(p-1)(2p-1)c^2c_2^2B_{p-1}^{(2n-2)}$$

mit der Festsetzung

$$B_{\varkappa}^{(2\lambda)} = 0, \text{ wenn } \varkappa < 0 \text{ oder } \varkappa > \lambda.$$

Die Werte der Koeffizienten bis $n = 4$ sind

$$\begin{aligned}
B_0^{(2)} &= \frac{c_3''}{c_3}, & B_0^{(6)} &= -8c_2^4(c_2^4 - c_3^4), & B_0^{(8)} &= 16c_2^4(2c_2^8 - 13c_2^4c_3^4 + 2c_3^8)\\
B_1^{(2)} &= c_2^2c_3^2, & B_1^{(6)} &= 8c_2^2c_3^2(2c_2^8 - 13c_2^4c_3^4 + 2c_3^8), & B_1^{(8)} &= -64c_2^2c_3^4(c_2^4 - c_3^4)(c_2^8 - 29c_2^4c_3^4 + c_3^8)\\
B_0^{(4)} &= 2c_2^4c_3^4, & B_2^{(6)} &= 120c_2^4c_3^4(c_2^4 - c_3^4), & B_2^{(8)} &= -2016c_2^4c_3^4(c_2^8 - 4c_2^4c_3^4 + c_3^8)\\
B_1^{(4)} &= -4c_2^2c_3^2(c_2^4 - c_3^4), & B_3^{(6)} &= 120c_2^6c_3^6, & B_3^{(8)} &= -6720c_2^6c_3^6(c_2^4 - c_3^4)\\
B_2^{(4)} &= -6c_2^4c_3^4, & & & B_4^{(8)} &= -5040c_2^8c_3^8.
\end{aligned}$$

8. Dritte Art der Darstellung der logarithmischen Ableitungen beliebiger Ordnung der Thetafunktionen. — Endlich wird man im Hinblick auf die Formeln (I″), (VII″), (VIII″), (X″), (XII″), (XIII″), (XIV″) zu folgender allgemeinen Darstellung geführt:

Die logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen lassen sich darstellen in der Form:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{2n}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n}} &= \sum_{p=0}^{n} C_p^{(2n)}\frac{\vartheta_3^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)}, & \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n+1}} &= -2c_2^2\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)C_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta_3^{2p}(x)}{\vartheta^{2p}(x)}\\
\frac{d^{2n}\ln\vartheta_1(x)}{dx^{2n}} &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_p^{(2n)}\frac{\vartheta_2^{2p}(x)}{\vartheta_1^{2p}(x)}, & \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta_1(x)}{dx^{2n+1}} &= 2c_2^2\frac{\vartheta(x)}{\vartheta_1(x)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_1(x)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_1(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p(p+1)C_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta_2^{2p}(x)}{\vartheta_1^{2p}(x)}\\
\frac{d^{2n}\ln\vartheta_2(x)}{dx^{2n}} &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_p^{(2n)}\frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta_2^{2p}(x)}, & \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta_2(x)}{dx^{2n+1}} &= -2c_2^2\frac{\vartheta(x)}{\vartheta_2(x)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(x)}\cdot\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_2(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p(p+1)C_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta_1^{2p}(x)}{\vartheta_2^{2p}(x)}\\
\frac{d^{2n}\ln\vartheta_3(x)}{dx^{2n}} &= \sum_{p=0}^{n} C_p^{(2n)}\frac{\vartheta^{2p}(x)}{\vartheta_3^{2p}(x)}, & \frac{d^{2n+1}\ln\vartheta_3(x)}{dx^{2n+1}} &= 2c_2^2\frac{\vartheta(x)}{\vartheta_3(x)}\cdot\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)}\cdot\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)}\cdot\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)C_{p+1}^{(2n)}\frac{\vartheta^{2p}(x)}{\vartheta_3^{2p}(x)}.
\end{aligned}$$

Dabei gelten für die Koeffizienten die Rekursionsformeln

$$C_p^{(2n)} = -2(p+1)(2p+1)c_2^2c_3^2C_{p+1}^{(2n-2)} + 4p^2(c_2^4 + c_3^4)C_p^{(2n-2)} - 2(p-1)(2p-1)c_2^2c_3^2C_{p-1}^{(2n-2)}$$

mit der Festsetzung

$$C_{\varkappa}^{(2\lambda)} = 0, \text{ wenn } \varkappa < 0 \text{ oder } \varkappa > \lambda.$$

Die Werte der Koeffizienten bis $n = 4$ sind

$$\begin{aligned}
C_0^{(2)} &= \frac{c_2''}{c_2}, & C_0^{(6)} &= -8c_2^4c_3^4(c_2^4 + c_3^4), & C_0^{(8)} &= -16c_2^4c_3^4(2c_2^8 + 13c_2^4c_3^4 + 2c_3^8)\\
C_1^{(2)} &= c_2^2c_3^2, & C_1^{(6)} &= 8c_2^2c_3^2(2c_2^8 + 13c_2^4c_3^4 + 2c_3^8), & C_1^{(8)} &= 64c_2^2c_3^2(c_2^4 + c_3^4)(c_2^8 + 29c_2^4c_3^4 + c_3^8)\\
C_0^{(4)} &= -2c_2^4c_3^4, & C_2^{(6)} &= -120c_2^4c_3^4(c_2^4 + c_3^4), & C_2^{(8)} &= -2016c_2^4c_3^4(c_2^8 + 4c_2^4c_3^4 + c_3^8)\\
C_1^{(4)} &= 4c_2^2c_3^2(c_2^4 + c_3^4), & C_3^{(6)} &= 120c_2^6c_3^6, & C_3^{(8)} &= 6720c_2^6c_3^6(c_2^4 + c_3^4)\\
C_2^{(4)} &= -6c_2^4c_3^4, & & & C_4^{(8)} &= -5040c_2^8c_3^8.
\end{aligned}$$

II. Teil.

Relationen zwischen den Thetafunktionen und ihren Ableitungen beliebiger Ordnung für das Argument Null.

9. Nullrelationen zwischen den Thetafunktionen und ihren Ableitungen, die aus den Darstellungen der logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen folgen. — Aus den im I. Teil behandelten Darstellungen der logarithmischen Ableitungen der Thetafunktionen mit beliebigem Argument gehen durch Spezialisierung auf das Argument Null zahlreiche Relationen hervor, die sich jedoch sämtlich nur auf die geraden Thetas beziehen.

So liefern die Darstellungen für die zweiten logarithmischen Ableitungen [1]) außer den bereits zitierten Formeln

$$(11) \qquad \frac{c_3''}{c_3} - \frac{c_2''}{c_2} = c^4, \quad \frac{c''}{c} - \frac{c_3''}{c_3} = c_2^4, \quad \frac{c_2''}{c_2} - \frac{c''}{c} = -c_3^4$$

noch die von Herrn Jahnke mitgeteilte:

$$(17) \qquad c_3^3 c_3'' = c^3 c'' + c_2^3 c_2''.$$

Aus den Darstellungen für die vierten und sechsten logarithmischen Ableitungen [2]) folgen für $x = 0$ die Relationen [3])

$$(18) \qquad -\frac{c^{IV}}{c} + 3\frac{c''^2}{c^2} = 2c_2^4 c_3^4$$

$$(19) \qquad \frac{c^{VI}}{c} - 15\frac{c^{IV}}{c}\cdot\frac{c''}{c} + 30\frac{c''^3}{c_3} = 8c_2^4 c_3^4(c_2^4 + c_3^4)$$

nebst je zwei analogen für die anderen beiden geraden Thetas, die man erhält, wenn man für c, c_2, c_3 und die zugehörigen Ableitungen bzw. $c_2, \sqrt{i}\,c_3, \sqrt{i}\,c$ und die entsprechenden Ableitungen substituiert. (Diese Bemerkung gilt auch für die weiteren Relationen dieser Nr.)

Die Entwicklungen für die achten bzw. zehnten logarithmischen Ableitungen liefern für das Argument Null die Beziehungen

$$(20) \quad -\frac{c^{VIII}}{c} + 28\frac{c^{VI}}{c}\cdot\frac{c''}{c} + 35\frac{c^{IV2}}{c^2} - 420\frac{c^{IV}}{c}\cdot\frac{c''^2}{c^2} + 630\frac{c''^4}{c^4} = 16c_2^4 c_3^4(2c_2^8 + 13c_2^4 c_3^4 + 2c_3^8)$$

$$(21) \quad \frac{c^X}{c} - 45\frac{c^{VIII}}{c}\cdot\frac{c''}{c} - 210\frac{c^{VI}}{c}\cdot\frac{c^{IV}}{c} + 1260\frac{c^{VI}}{c}\cdot\frac{c''^2}{c^2} + 3150\frac{c^{IV2}}{c^2}\cdot\frac{c''}{c} -$$
$$- 18900\frac{c^{IV}}{c}\cdot\frac{c''^3}{c^3} + 22680\frac{c''^5}{c^5} = 128c_2^4 c_3^4(c_2^4 + c_3^4)(c_2^8 + 29c_2^4 c_3^4 + c_3^8),$$

---

1) Vgl. (I) und (II).
2) Vgl. (VII) und (X).
3) Vgl. Pascal, a. a. O. S. 25.

die nach Subtraktion des 35-fachen des Quadrates von (18) bzw. des 120-fachen des Produktes von (18) und (19) die einfachere Gestalt annehmen:

$$(22)\qquad -\frac{c^{\mathrm{VIII}}}{c}+28\frac{c^{\mathrm{VI}}}{c}\cdot\frac{c''}{c}-210\frac{c^{\mathrm{IV}}}{c}\cdot\frac{c''^2}{c^2}+315\frac{c''^4}{c^4}=4c_2^4c_3^4(8c_2^8+17c_2^4c_3^4+8c_3^8)$$

$$(23)\qquad \frac{c^{\mathrm{X}}}{c}-45\frac{c^{\mathrm{VIII}}}{c}\cdot\frac{c''}{c}+630\frac{c^{\mathrm{VI}}}{c}\cdot\frac{c''^2}{c^2}-3150\frac{c^{\mathrm{IV}}}{c}\cdot\frac{c''^3}{c^3}+3780\frac{c''^5}{c^5}=$$

$$=32c_2^4c_3^4(c_2^4+c_3^4)(4c_2^8+11c_2^4c_3^4+4c_3^8).$$

So fortfahrend könnte man auch für die höheren Ableitungen entsprechende Nullrelationen aus den Darstellungen der logarithmischen Ableitungen durch Thetaquotienten gewinnen. Allgemein würde sein

$$(24)\qquad \left|\frac{d^{2n}\ln\vartheta(x)}{dx^{2n}}\right|_{x=0}=A_0^{(2n)},\quad \left|\frac{d^{2n}\ln\vartheta_2(x)}{dx^{2n}}\right|_{x=0}=C_0^{(2n)},\quad \left|\frac{d^{2n}\ln\vartheta_3(x)}{dx^{2n}}\right|_{x=0}=B_0^{(2n)},$$

wo die rechten Seiten aus den Nrn. **6**—**8** zu entnehmen sind.

10. Andere Methode zur Herleitung von Nullrelationen. — Indessen braucht man gar nicht von den logarithmischen Ableitungen auszugehen, um Differentialrelationen zwischen den Thetas für das Argument Null herzuleiten. Man kann sie auch durch eine direkte Methode gewinnen, die überdies den Vorteil hat, sich auch da mit gleichem Erfolg anwenden zu lassen, wo jene versagt, nämlich zur Aufstellung von entsprechenden Relationen für die Funktion $\vartheta_1(x)$[1]). Bekanntlich genügen die Thetafunktionen und ihre Ableitungen der Differentialgleichung[2])

$$(25)\qquad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+4q\frac{\partial\vartheta}{\partial q}=0.$$

Hat man nun irgend eine Nullrelation zwischen den Thetafunktionen, z. B. die Pascalsche:

$$(18)\qquad -\frac{c^{\mathrm{IV}}}{c}+3\frac{c''^2}{c^2}=2c_2^4c_3^4,$$

so kann man, da die c noch von q abhängen, bezüglich dieser Größe die Ableitung bilden und darauf die Differentialgleichung (25) anwenden. Dadurch erhält man die neue Relation

$$\frac{c^{\mathrm{VI}}}{c}-7\frac{c^{\mathrm{IV}}}{c}\cdot\frac{c''}{c}+6\frac{c''^3}{c^3}=-8c_2^4c_3^4\left(\frac{c_2''}{c_2}+\frac{c_3''}{c_3}\right),$$

in der wieder bloß Ableitungen nach x für $x=0$ auftreten, jedoch von höherer Ordnung. Drückt man noch $\frac{c_2''}{c_2}$ und $\frac{c_3''}{c_3}$ vermittels (11) durch $\frac{c''}{c}$ aus und beachtet die Ausgangsrelation (18), so erhält man die Pascalsche Formel

$$(19)\qquad \frac{c^{\mathrm{VI}}}{c}-15\frac{c^{\mathrm{IV}}}{c}\cdot\frac{c''}{c}+30\frac{c''^3}{c^3}=8c_2^4c_3^4(c_2^4+c_3^4).$$

1) Vgl. Nr. **15.**

2) Jacobi, Ges. W. II, 170.

Man ersieht hieraus, daß man auf diesem Wege sukzessive die Formeln der vorigen Nr. ableiten kann, ohne der Entwicklungen der logarithmischen Ableitungen nach Thetaquotienten zu bedürfen. Ohne Mühe läßt sich dieses Verfahren auch zur Ableitung der allgemeinen Nullrelationen verwenden, wie in Nr. **12** gezeigt werden soll.

II. Bildungsgesetz der Koeffizienten der entwickelten Nullrelationen. — In den für $n \leqq 5$ entwickelten Nullrelationen für die $(2n)$-ten Ableitungen der Thetas (vgl. (18), (19), (22), (23)) haben die linker Hand auftretenden Glieder, abgesehen von einem Koeffizienten, die Form $\frac{c_\nu^{(2n-2m)}}{c_\nu} \cdot \frac{c_\nu''^m}{c_\nu^m}$, $(\nu = 0, 2, 3)$, $(m = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, während die Ausdrücke auf der rechten Seite aus Potenzen der Thetas selber für den Nullwert des Argumentes zusammengesetzt sind. Die Koeffizienten, mit denen die zuerst genannten Glieder behaftet sind, befolgen ein eigentümliches Bildungsgesetz, das kenntlich wird, wenn ich die betreffenden Relationen in folgender Gestalt schreibe:

$$(26)\quad -\frac{c_\nu^{IV}}{c_\nu} + 1\cdot 3\,\frac{c_\nu''^2}{c_\nu^2} = P_\nu^{(4)}$$

$$(27)\quad +\frac{c_\nu^{VI}}{c_\nu} - 5\cdot\binom{3}{1}\frac{c_\nu^{IV}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''}{c_\nu} + 2\cdot 5\cdot 3\,\frac{c_\nu''^3}{c_\nu^3} = P_\nu^{(6)}$$

$$(28)\quad -\frac{c_\nu^{VIII}}{c_\nu} + 7\cdot\binom{4}{1}\frac{c_\nu^{VI}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''}{c_\nu} - 7\cdot 5\cdot\binom{4}{2}\frac{c_\nu^{VI}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^2}{c_\nu^2} + 3\cdot 7\cdot 5\cdot 3\,\frac{c_\nu''^4}{c_\nu^4} = P_\nu^{(8)} \qquad (\nu = 0, 2, 3).$$

$$(29)\quad +\frac{c_\nu^{X}}{c_\nu} - 9\cdot\binom{5}{1}\frac{c_\nu^{VIII}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''}{c_\nu} + 9\cdot 7\cdot\binom{5}{2}\frac{c_\nu^{VI}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^2}{c_\nu^2} - 9\cdot 7\cdot 5\cdot\binom{5}{3}\frac{c_\nu^{IV}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^3}{c_\nu^3} + 4\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\,\frac{c_\nu''^5}{c_\nu^5} = P_\nu^{(10)}$$

Offenbar ist der Koeffizient des Gliedes $\frac{c_\nu^{(2n-2m)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^m}{c_\nu^m}$, wenn m von den Werten 0 und $n-1$ verschieden ist, gleich $(-1)^{n-m-1}\cdot(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2m+1)\cdot\binom{n}{m}$, für die beiden Grenzwerte dagegen $(-1)^{n-1}$ bzw. $(n-1)\cdot(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3$, so daß die Relationen einheitlich so geschrieben werden können:

$$(30)\quad \begin{cases} (-1)^{n-1}\dfrac{c_\nu^{(2n)}}{c_\nu} + \displaystyle\sum_{m=1}^{n-2}(-1)^{n-m-1}\cdot(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2m+1)\cdot\binom{n}{m}\frac{c_\nu^{(2n-2m)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^m}{c_\nu^m} + \\ \qquad + (n-1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\,\dfrac{c_\nu''^n}{c_\nu^n} = P_\nu^{(2n)}, \\ \qquad\qquad (\nu = 0, 2, 3), \quad (n = 2, 3, 4, 5). \end{cases}$$

Hierbei haben die $P_\nu^{(2n)}$ folgende Werte:

$$P^{(4)} = 2c_2^4c_3^4, \quad P^{(6)} = 8c_2^4c_3^4(c_2^4+c_3^4), \quad P^{(8)} = 32c_2^4c_3^4(c_2^4+c_3^4)^2+4(c_2^4c_3^4)^2, \quad P^{(10)} = 128c_2^4c_3^4(c_2^4+c_3^4)^3+96(c_2^4c_3^4)^2(c_2^4+c_3^4)$$
$$P_2^{(4)} = 2c_3^4c^4, \quad P_2^{(6)} = -8c_3^4c^4(c_3^4+c^4), \quad P_2^{(8)} = 32c_3^4c^4(c_3^4+c^4)^2+4(c_3^4c^4)^2, \quad P_2^{(10)} = -128c_3^4c^4(c_3^4+c^4)^3-96(c_3^4c^4)^2(c_3^4+c^4)$$
$$P_3^{(4)} = -2c^4c_2^4, \quad P_3^{(6)} = -8c^4c_2^4(c^4-c_2^4), \quad P_3^{(8)} = -32c^4c_2^4(c^4-c_2^4)^2+4(c^4c_2^4)^2, \quad P_3^{(10)} = -128c^4c_2^4(c^4-c_2^4)^3+96(c^4c_2^4)^2(c^4-c_2^4).$$

Diese können nun, wie man sich leicht überzeugt, unter der allgemeinen Form

$$(31)\quad \begin{cases} P^{(2n)} = \sum_{m=1}^{k} K_m^{(2n)} (c_2^4 c_3^4)^m (c_2^4 + c_3^4)^{n-2m} \\ P_2^{(2n)} = \sum_{m=1}^{k} (-1)^n K_m^{(2n)} (c_3^4 c^4)^m (c_3^4 + c^4)^{n-2m} \\ P_3^{(2n)} = \sum_{m=1}^{k} (-1)^m K_m^{(2n)} (c^4 c_2^4)^m (c^4 - c_2^4)^{n-2m} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} k = \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ k = \frac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{pmatrix} \quad (n = 2, 3, 4, 5)$$

dargestellt werden, wobei

$$(32)\quad K_1^{(4)} = 2; \quad K_1^{(6)} = 8; \quad K_1^{(8)} = 32, \; K_2^{(8)} = 4; \quad K_1^{(10)} = 128, \; K_2^{(10)} = 96.$$

Demnach sind in den Gleichungen (30), (31), (32) die Nullrelationen zwischen den geraden Thetas und ihren Ableitungen bis zur zehnten Ordnung enthalten.

12. Nullrelationen zwischen den geraden Thetas und ihren Ableitungen $(2n)$-ter Ordnung, wo $n > 5$. — Ich behaupte nun, die Relationen (30) und (31) behalten ihre Gültigkeit, wenn $n > 5$ wird, d. h. sie geben einen allgemeinen Ausdruck für die Nullrelationen zwischen den geraden Thetas und ihren Ableitungen beliebiger Ordnung. Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu beweisen, schlage ich den Weg der vollständigen Induktion ein. Ich nehme an, die Relationen (30) und (31) wären richtig für $n' = n-2$ und $n' = n-1$ und beweise, daß sie dann auch richtig sein müssen für $n' = n$. Daraus folgt, da für $n \leqq 5$ ihre Richtigkeit bereits bewiesen ist, die allgemeine Gültigkeit der Relationen. Dieses Beweisverfahren liefert zugleich Rekursionsformeln zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten $K_m^{(2n)}$, wenn $n > 3$.

Ich gehe nunmehr zum Beweise über. Gesetzt, es bestänen für die $(2n-4)$-ten Ableitungen der geraden Thetas die Nullrelationen

$$(33)\quad \begin{cases} (-1)^{n-3} \frac{c_\nu^{(2n-4)}}{c_\nu} + \sum_{m=1}^{n-4} (-1)^{n-m-3} \cdot (2n-5)(2n-7)\cdots(2n-2m-3) \binom{n-2}{m} \frac{c_\nu^{(2n-2m-4)}}{c_\nu} \cdot \frac{c_\nu''^m}{c_\nu^m} + \\ \qquad + (n-3)\cdot(2n-5)(2n-7)\cdots 5\cdot 3 \frac{c_\nu''^{n-2}}{c_\nu^{n-2}} = P_\nu^{(2n-4)} \\ \qquad\qquad (\nu = 0, 2, 3), \end{cases}$$

wo

$$(34)\quad \begin{cases} P^{(2n-4)} = \sum_{m=1}^{k-1} K_m^{(2n-4)} (c_2^4 c_3^4)^m (c_2^4 + c_3^4)^{n-2m-2} \\ P_2^{(2n-4)} = \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^{n-2} K_m^{(2n-4)} (c_3^4 c^4)^m (c_3^4 + c^4)^{n-2m-2} \\ P_3^{(2n-4)} = \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^m K_m^{(2n-4)} (c^4 c_2^4)^m (c^4 - c_2^4)^{n-2m-2} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} k = \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ k = \frac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{pmatrix},$$

und desgleichen für die $(2n-2)$-ten Ableitungen der geraden Thetas die Nullrelationen

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} (-1)^{n-2}\dfrac{c_\nu^{(2n-2)}}{c_\nu}+\sum\limits_{m=1}^{n-3}(-1)^{n-m-2}\cdot(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2m-1)\cdot\binom{n-1}{m}\dfrac{c_\nu^{(2n-2m-2)}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''^{m}}{c_\nu^{m}}+ \\ \qquad +(n-2)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\,\dfrac{c_\nu''^{n-1}}{c_\nu^{n-1}} \;=\; P_\nu^{(2n-2)} \\ \qquad\qquad (\nu=0,2,3), \end{array}\right.$$

wo

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{ll} P^{(2n-2)} = \sum\limits_{m=1}^{k_1} & K_m^{(2n-2)}\,(c_2^4 c_3^4)^m\,(c_2^4+c_3^4)^{n-2m-1} \\ P_2^{(2n-2)} = \sum\limits_{m=1}^{k_1}(-1)^{n-1} & K_m^{(2n-2)}\,(c_3^4 c^4)^m\,(c_3^4+c^4)^{n-2m-1} \\ P_3^{(2n-2)} = \sum\limits_{m=1}^{k_1}(-1)^{m} & K_m^{(2n-2)}\,(c^4 c_2^4)^m\,(c^4-c_2^4)^{n-2m-1} \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{l} k_1=\dfrac{n-2}{2},\ n \text{ gerade} \\ k_1=\dfrac{n-1}{2},\ n \text{ ungerade} \end{array}\right).$$

Dann nehme ich auf beiden Seiten von (35) die Ableitung bezüglich q und drücke vermittels der Differentialgleichung (25) — wie in Nr. **10** beschrieben worden ist — alles wieder durch Ableitungen nach x aus. Dadurch möge $P_\nu^{(2n-2)}$ in $Q_\nu^{(2n)}$ übergehen, und ich erhalte

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} (-1)^{n-1}\dfrac{c_\nu^{(2n)}}{c_\nu}+(-1)^{n-2}\left[1+(n-1)(2n-3)\right]\dfrac{c_\nu^{(2n-2)}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''}{c_\nu}+\sum\limits_{m=2}^{n-3}(-1)^{n-m-1}\cdot(2n-3)(2n-5)\cdots \\ \quad\cdots(2n-2m+1)\left[(2n-2m-1)\binom{n-1}{m}+m\binom{n-1}{m-1}\right]\cdot\dfrac{c_\nu^{(2n-2m)}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''^{m}}{c_\nu^{m}}-(2n-3)(2n-5)\cdots \\ \quad\cdots 5\cdot(n-2)\left[\binom{n-1}{n-3}+3(n-1)\right]\dfrac{c_\nu^{\mathrm{IV}}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''^{n-2}}{c_\nu^{n-2}}+(n-1)(n-2)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\,\dfrac{c_\nu''^{n}}{c_\nu^{n}}+ \\ \quad+\sum\limits_{m=1}^{n-3}(-1)^{n-m-1}\cdot(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2m-1)\binom{n-1}{m}m\,\dfrac{c_\nu^{(2n-2m-2)}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu^{\mathrm{IV}}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''^{m-1}}{c_\nu^{m-1}} \;=\; Q_\nu^{(2n)}. \end{array}\right.$$

Dabei ergeben sich für $Q_\nu^{(2n)}$, wenn man berücksichtigt, daß

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial}{\partial q}c_2^4 c_3^4 = & 4c_2^4 c_3^4(c_2^4+c_3^4)-8c_2^4 c_3^4\dfrac{c''}{c}, & \dfrac{\partial}{\partial q}(c_2^4+c_3^4) = & 8c_2^4 c_3^4-4(c_2^4+c_3^4)\dfrac{c''}{c} \\ \dfrac{\partial}{\partial q}c_3^4 c^4 = & -4c_3^4 c^4(c_3^4+c^4)-8c_3^4 c^4\dfrac{c_2''}{c_2}, & \dfrac{\partial}{\partial q}(c_3^4+c^4) = & -8c_3^4 c^4-4(c_3^4+c^4)\dfrac{c_2''}{c_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q}c^4 c_2^4 = & 4c^4 c_2^4(c^4-c_2^4)-8c^4 c_2^4\dfrac{c_3''}{c_3}, & \dfrac{\partial}{\partial q}(c^4-c_2^4) = & -8c^4 c_2^4-4(c^4-c_2^4)\dfrac{c_3''}{c_3} \end{array}\right.$$

ist, unter Uebergehung von Zwischenrechnungen die Werte

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{l} Q^{(2n)} = \sum\limits_{m=1}^{k}\left[4mK_m^{(2n-2)}+8(n-2m+1)K_{m-1}^{(2n-2)}\right](c_2^4 c_3^4)^m(c_2^4+c_3^4)^{n-2m}-4(n-1)\dfrac{c''}{c}\cdot P^{(2n-2)}, \\ Q_2^{(2n)} = \sum\limits_{m=1}^{k}(-1)^n\left[4mK_m^{(2n-2)}+8(n-2m+1)K_{m-1}^{(2n-2)}\right](c_3^4 c^4)^m(c_3^4+c^4)^{n-2m}-4(n-1)\dfrac{c_2''}{c_2}\cdot P_2^{(2n-2)}, \\ Q_3^{(2n)} = \sum\limits_{m=1}^{k}(-1)^m\left[4mK_m^{(2n-2)}+8(n-2m+1)K_{m-1}^{(2n-2)}\right](c^4 c_2^4)^m(c^4-c_2^4)^{n-2m}-4(n-1)\dfrac{c_3''}{c_3}\cdot P_3^{(2n-2)}, \end{array}\right.$$

wobei zu den früheren Bedingungen

$$k = \frac{n}{2},\ n \text{ gerade}; \quad k = \frac{n-1}{2},\ n \text{ ungerade}$$

noch die Festsetzung tritt:

(40) $$K_{\varkappa}^{(2\lambda)} = 0, \text{ wenn } \varkappa \leqq 0 \text{ oder wenn } 2\varkappa > \lambda.$$

Die Gleichungen (39) zeigen, daß in $Q_\nu^{(2n)}$ wieder die Größen $P_\nu^{(2n-2)}$ vorkommen. Setzt man für sie die Ausdrücke aus der Gleichung (35) ein, so geht die Gleichung (37) nach einigen Umformungen über in

(41)
$$\left\{\begin{aligned}
&(-1)^{n-1}\frac{c_\nu^{(2n)}}{c_\nu} + (-1)^{n-2}\cdot[1+(n-1)(2n+1)]\frac{c_\nu^{(2n-2)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''}{c_\nu} + \sum_{m=2}^{n-3}(-1)^{n-m-1}\cdot(2n-3)(2n-5)\cdots \\
&\cdots(2n-2m+1)\left[(2n-2m-1)\binom{n-1}{m} + (4n+m-4)\binom{n-1}{m-1}\right]\cdot\frac{c_\nu^{(2n-2m)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^{m}}{c_\nu^{m}} - (2n-3)(2n-5)\cdots \\
&\cdots 5\left[3(n-2)(n-1) + (5n-6)\binom{n-1}{n-3}\right]\frac{c_\nu^{\mathrm{IV}}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^{n-2}}{c_\nu^{n-2}} + (2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 5\cdot(n-2)(n-1)\frac{c_\nu''^{n}}{c_\nu^{n}} + \\
&+\sum_{m=1}^{n-3}(-1)^{n-m-1}\cdot(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2m-1)\binom{n-1}{m} m\,\frac{c_\nu^{(2n-2m-2)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu^{\mathrm{IV}}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^{m-1}}{c_\nu^{m-1}} = R_\nu^{(2n)},
\end{aligned}\right.$$

wo

(42)
$$\left\{\begin{aligned}
R^{(2n)} &= \sum_{m=1}^{k}\ [4m K_m^{(2n-2)} + 8(n-2m+1)K_{m-1}^{(2n-2)}](c_2^4 c_3^4)^m (c_2^4 + c_3^4)^{n-2m} \\
R_2^{(2n)} &= \sum_{m=1}^{k}(-1)^n[4m K_m^{(2n-2)} + 8(n-2m+1)K_{m-1}^{(2n-2)}](c_3^4 c^4)^m (c_3^4 + c^4)^{n-2m} \\
R_3^{(2n)} &= \sum_{m=1}^{k}(-1)^m[4m K_m^{(2n-2)} + 8(n-2m+1)K_{m-1}^{(2n-2)}](c^4 c_2^4)^m (c^4 - c_2^4)^{n-2m}
\end{aligned}\right.$$

ist und die üblichen Festsetzungen für ν, k und $K_{\varkappa}^{(2\lambda)}$ bestehen. Aus der Gleichung (41) will ich noch die Glieder entfernen, die von der Form $\frac{c_\nu^{(2n-2m-2)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu^{\mathrm{IV}}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^{m-1}}{c_\nu^{m-1}}$ sind, da solche in der zu beweisenden Relation nicht vorkommen. Zu diesem Zweck multipliziere ich die Gleichungen (33) und (26) miteinander und erhalte

$$\begin{aligned}
&(-1)^{n-2}\frac{c_\nu^{(2n-4)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu^{\mathrm{IV}}}{c_\nu} + \sum_{m=1}^{n-4}(-1)^{n-m-2}\cdot(2n-5)(2n-7)\cdots(2n-2m-3)\binom{n-2}{m}\frac{c_\nu^{(2n-2m-4)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu^{\mathrm{IV}}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^{m}}{c_\nu^{m}} - \\
&-(n-3)(2n-5)(2n-7)\cdots 5\cdot 3\,\frac{c_\nu^{\mathrm{IV}}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^{n-2}}{c_\nu^{n-2}} + (-1)^{n-3}\cdot 3\,\frac{c_\nu^{(2n-4)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^{2}}{c_\nu^{2}} + \sum_{m=1}^{n-4}(-1)^{n-m-3}\cdot 3(2n-5)(2n-7)\cdots \\
&\cdots(2n-2m-3)\binom{n-2}{m}\frac{c_\nu^{(2n-2m-4)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^{m+2}}{c_\nu^{m+2}} + 3(n-3)(2n-5)(2n-7)\cdots 5\cdot 3\,\frac{c_\nu''^{n}}{c_\nu^{n}} = P_\nu^{(2n-4)}\cdot P_\nu^{(4)},
\end{aligned}$$

die mit Benutzung der Identität $\binom{\nu}{\mu} = \frac{\mu+1}{\nu+1}\binom{\nu+1}{\mu+1}$ und nach geeigneter Aenderung des Summationsbuchstaben übergeht in

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{(n-1)(2n-3)}\cdot\sum\limits_{m=1}^{n-3}(-1)^{n-m-1}\cdot(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2m-1)\,m\binom{n-1}{m}\dfrac{c_\nu^{(2n-2m-2)}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu^{\mathrm{IV}}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''^{m-1}}{c_\nu^{m-1}}+ \\
+(-1)^{n-3}\cdot 3\,\dfrac{c_\nu^{(2n-4)}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''^2}{c_\nu^2}+\sum\limits_{m=3}^{n-3}(-1)^{n-m-1}\cdot(2n-5)(2n-7)\cdots(2n-2m+1)\cdot 3\binom{n-2}{m-2}\dfrac{c_\nu^{(2n-2m)}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''^m}{c_\nu^m}- \\
-(2n-5)(2n-7)\cdots 5\cdot 3\left[n-3+\binom{n-2}{2}\right]\dfrac{c_\nu^{\mathrm{IV}}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''^{n-2}}{c_\nu^{n-2}}+3(n-3)(2n-5)(2n-7)\cdots 5\cdot 3\,\dfrac{c_\nu''^n}{c_\nu^n}=P_\nu^{(2n-4)}\cdot P_\nu^{(4)}.
\end{cases}
\tag{43}
$$

Multipliziert man nun diese Gleichung mit $(n-1)(2n-3)$ und subtrahiert sie alsdann von der Gleichung (41), so fallen in letzterer sämtliche Glieder der oben genannten Form fort, und es bleibt:

$$
\begin{cases}
(-1)^{n-1}\dfrac{c_\nu^{(2n)}}{c_\nu}+(-1)^{n-2}\,[1+(n-1)(2n+1)]\dfrac{c_\nu^{(2n-2)}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''}{c_\nu}+(-1)^{n-3}\cdot(n-1)(2n-3)\left[\dfrac{(2n-5)(n-2)}{2}+\right. \\
\left.+2(2n-1)-3\right]\dfrac{c_\nu^{(2n-4)}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''^2}{c_\nu^2}+\sum\limits_{m=3}^{n-3}(-1)^{n-m-1}\cdot(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2m+1)\left[(2n-2m-1)\binom{n-1}{m}+\right. \\
\left.+(4n+m-4)\binom{n-1}{m-1}-3(n-1)\binom{n-2}{m-2}\right]\dfrac{c_\nu^{(2n-2m)}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''^m}{c_\nu^m}-(2n-3)(2n-5)\cdots 7\cdot 5\left[3(n-2)(n-1)+\right. \\
\left.+(5n-6)\binom{n-1}{2}-3(n-3)(n-1)-3(n-1)\binom{n-2}{2}\right]\dfrac{c_\nu^{\mathrm{IV}}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''^{n-2}}{c_\nu^{n-2}}+ \\
+(n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\,[5(n-2)-3(n-3)]\dfrac{c_\nu''^n}{c_\nu^n}=R_\nu^{(2n)}-(n-1)(2n-3)\,P_\nu^{(2n-4)}\cdot P_\nu^{(4)}.
\end{cases}
\tag{44}
$$

Es kommt nun darauf an, in dieser Relation die Zahlenkoeffizienten zusammenzufassen. Der Koeffizient von $\dfrac{c_\nu^{(2n-2)}}{c_\nu}\cdot\dfrac{c_\nu''}{c_\nu}$ ist offenbar identisch mit $(2n-1)\binom{n}{1}$; der Koeffizient des nächsten Gliedes desgleichen mit $(2n-1)(2n-3)\binom{n}{2}$. Zur Berechnung des Koeffizienten des allgemeinen Gliedes bediene ich mich der Identitäten[1])

$$\binom{\nu}{\mu}=\frac{\mu+1}{\nu+1}\binom{\nu+1}{\mu+1},\qquad \binom{\nu}{\mu}+\binom{\nu}{\mu+1}=\binom{\nu+1}{\mu+1};$$

dann läßt sich der Ausdruck in der eckigen Klammer des allgemeinen Gliedes schreiben:

$$
\begin{aligned}
&(2n-2m-1)\binom{n}{m}+(2n+3m-3)\cdot\frac{m}{n}\cdot\binom{n}{m}-3\,\frac{m(m-1)}{n}\cdot\binom{n}{m}= \\
&\qquad=(2n-2m-1)\binom{n}{m}+2m\binom{n}{m}=(2n-1)\binom{n}{m},
\end{aligned}
$$

sodaß also der Koeffizient des allgemeinen Gliedes die Gestalt $(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2m+1)\binom{n}{m}$ hat. Was schließlich die beiden letzten Glieder betrifft,

1) Vgl. z. B. Pascal, Repertorium der höh. Mathem. I, S. 23, 1900.

so erkennt man unschwer, daß ihre Koeffizienten $(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot\binom{n}{2}$ bzw. $(n-1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3$ sind.

Demnach hat die linke Seite der Relation (44) die Form

$$(-1)^{n-1}\frac{c_\nu^{(2n)}}{c_\nu}+\sum_{m=1}^{n-2}(-1)^{n-m-1}\cdot(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2m+1)\binom{n}{m}\frac{c_\nu^{(2n-2m)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^m}{c_\nu^m}+$$
$$+(n-1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\,\frac{c_\nu''^n}{c_\nu^n},$$

wie behauptet worden ist. Ich gehe nunmehr zur rechten Seite über, die ich der Verabredung gemäß mit $P_\nu^{(2n)}$ bezeichnen will. Setze ich für die darin vorkommenden Größen $R_\nu^{(2n)}$, $P_\nu^{(2n-4)}$, $P_\nu^{(4)}$ ihre Werte aus (42), (34), (18) ein, so erhalte ich

$$P^{(2n)}=\sum_{m=1}^{k}\;[4mK_m^{(2n-2)}+8(n-2m+1)K_{m-1}^{(2n-2)}](c_2^4c_3^4)^m(c_2^4+c_3^4)^{n-2m}-$$
$$-(n-1)(2n-3)\sum_{m=1}^{k-1}\;2K_m^{(2n-4)}(c_2^4c_3^4)^{m+1}(c_2^4+c_3^4)^{n-2m-2}$$

$$P_2^{(2n)}=\sum_{m=1}^{k}(-1)^n\,[4mK_m^{(2n-2)}+8(n-2m+1)K_{m-1}^{(2n-2)}](c_3^4c^4)^m(c_3^4+c^4)^{n-2m}-$$
$$-(n-1)(2n-3)\sum_{m=1}^{k-1}(-1)^n\;2K_m^{(2n-4)}(c_3^4c^4)^{m+1}(c_3^4+c^4)^{n-2m-2}$$

$$P_3^{(2n)}=\sum_{m=1}^{k}(-1)^m[4mK_m^{(2n-2)}+8(n-2m+1)K_{m-1}^{(2n-2)}](c^4c_2^4)^m(c^4-c_2^4)^{n-2m}-$$
$$-(n-1)(2n-3)\sum_{m=1}^{k-1}(-1)^{m+1}2K_m^{(2n-4)}(c^4c_2^4)^{m+1}(c^4-c_2^4)^{n-2m-2},$$

wobei durch geeignete Aenderung des Summationsbuchstaben beide Summen in eine zusammengefaßt werden können.

13. Zusammenstellung der Resultate betreffend Nullrelationen für die geraden Thetafunktionen. — Aus den Entwicklungen der vorigen Nr. ergibt sich daher

Theorem (A): Zwischen den geraden Thetafunktionen und ihren Ableitungen $(2n)$-ter Ordnung $(n>1)$ bestehen für das Argument Null die Relationen

$$(45)\quad (-1)^{n-1}\frac{c_\nu^{(2n)}}{c_\nu}+\sum_{m=1}^{n-2}(-1)^{n-m-1}\cdot(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2m+1)\binom{n}{m}\frac{c_\nu^{(2n-2m)}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''^m}{c_\nu^m}+$$
$$+(n-1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\,\frac{c_\nu''^n}{c_\nu^n}=P_\nu^{(2n)},$$
$$(\nu=0,2,3),$$

wo

$$(45a)\quad \begin{cases} P^{(2n)}=\sum_{m=1}^{k} & K_m^{(2n)}(c_2^4c_3^4)^m(c_2^4+c_3^4)^{n-2m} \\ P_2^{(2n)}=\sum_{m=1}^{k}(-1)^n & K_m^{(2n)}(c_3^4c^4)^m(c_3^4+c^4)^{n-2m} \\ P_3^{(2n)}=\sum_{m=1}^{k}(-1)^m & K_m^{(2n)}(c^4c_2^4)^m(c^4-c_2^4)^{n-2m} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} k=\frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ k=\frac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{pmatrix}.$$

Für die Koeffizienten gelten dabei für $n > 3$ die Rekursionsformeln

$$K_m^{(2n)} = 4m K_m^{(2n-2)} + 8(n-2m+1) K_{m-1}^{(2n-2)} - 2(n-1)(2n-3) K_{m-1}^{(2n-4)} \tag{46}$$

mit der Bedingung

$$K_\varkappa^{(2\lambda)} = 0, \text{ wenn } \varkappa \leqq 0 \text{ oder } 2\varkappa > \lambda. \tag{46a}$$

Zahlenwerte der $K_m^{(2n)}$ bis $n = 10$.

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$n=2$	2				
$n=3$	8				
$n=4$	32	4			
$n=5$	128	96			
$n=6$	512	960	408		
$n=7$	2048	7168	7584		
$n=8$	8192	46080	88320	−13584	
$n=9$	32768	270336	814080	−624384	
$n=10$	131072	1490944	6481920	−17478144	−838368.

14. Nullrelationen zwischen $\vartheta_1(x)$ und seinen Ableitungen, hergeleitet aus den Nullrelationen zwischen den Ableitungen der geraden Thetas. — Bei den Nullrelationen zwischen $\vartheta_1(x)$ und seinen Ableitungen tritt gegenüber den entsprechenden Relationen für die geraden Thetas der wesentliche Unterschied ein, daß sie nicht aus den Darstellungen der logarithmischen Ableitungen der Thetas bei beliebigem Argument durch Spezialisierung des letzteren hervorgehen. Man ist also von vornherein auf eine andere Art der Ableitung angewiesen. Herr Pascal, der für $n = 2, 3$ die in Frage stehenden Relationen[1]) aufgestellt hat, benutzt zu deren Ableitung die Nullrelationen zwischen den geraden Thetas und ihren Ableitungen. Er geht aus von der schon mehrfach erwähnten Formel (7), bildet von ihr die 1. und 2. Ableitung bezüglich q und führt mit Hilfe der Differentialgleichung (25) wieder die Ableitungen bezüglich x ein. Er erhält so die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{c_1^{V}}{c_1'} - \frac{c_1'''^2}{c_1'^2} &= \sum_\nu \frac{c_\nu^{IV}}{c_\nu} - \sum_\nu \frac{c_\nu''^2}{c_\nu^2}, \\ \frac{c_1^{VII}}{c_1'} - 3\frac{c_1^{V}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''}{c_1'} + 2\frac{c_1'''^2}{c_1'^2} &= \sum_\nu \frac{c_\nu^{VI}}{c_\nu} - 3\sum_\nu \frac{c_\nu^{IV}}{c_\nu}\cdot\frac{c_\nu''}{c_\nu} + 2\sum_\nu \frac{c_\nu''^3}{c_\nu^3}, \end{aligned} \qquad (\nu = 0, 2, 3)$$

in denen die rechts stehenden Summen durch Potenzen der geraden Thetas und Ableitungen von $\vartheta_1(x)$ für den Nullwert des Argumentes ausgedrückt werden müssen, um in die endgültige Gestalt

1) A. a. O. S. 23.

$$(8) \qquad -3\frac{c_1^{V}}{c_1'}+5\frac{c_1'''^{2}}{c_1'^{2}} = c^8+c_2^8+c_3^8,$$

$$(9) \qquad 9\frac{c_1^{VII}}{c_1'}-63\frac{c_1^{V}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''}{c_1'}+70\frac{c_1'''^{3}}{c_1'^{3}} = -8(c_2^4+c_3^4)(c_3^4+c^4)(c^4-c_2^4)$$

überzugehen. Es ist klar, daß man auf diesem Wege, wenn auch mit zum Teil recht umständlichen Rechnungen, entsprechende Relationen für die höheren Ableitungen aufstellen könnte.

15. Andere Methode zur Herleitung der vorstehenden Relationen. — Indessen kommt man schneller zum Ziel, wenn man die in Nr. **10** entwickelte Methode auch hier anwendet. Nötig ist dazu allein die Kenntnis der Pascalschen Relation (8), insbesondere braucht man, im Gegensatz zu der Methode des Herrn Pascal, nicht die erwähnten Beziehungen zwischen den Ableitungen der geraden Thetas zu kennen. Will man z. B. die Nullrelation für die neunte Ableitung aufstellen, so differentiiert man beide Seiten von (9) nach q, wendet die Differentialgleichung (25) an und erhält zunächst:

$$-9\frac{c_1^{IX}}{c_1'}+72\frac{c_1^{VII}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''}{c_1'}+63\frac{c_1^{V2}}{c_1'^{2}}-336\frac{c_1^{V}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^{2}}{c_1'^{2}}+210\frac{c_1'''^{4}}{c_1'^{4}} =$$
$$= 32(c_2^4+c_3^4)(c_3^4+c^4)(c^4-c_2^4)\frac{c_1'''}{c_1'}+32(c^{16}+c_2^{16}+c_3^{16})$$

und hieraus, wenn man (9) beachtet und das 7-fache des Quadrates von (8) subtrahiert:

$$(47) \qquad -\frac{c_1^{IX}}{c_1'}+12\frac{c_1^{VII}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''}{c_1'}-42\frac{c_1^{V}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^{2}}{c_1'^{2}}+35\frac{c_1'''^{4}}{c_1'^{4}} = 2(c^{16}+c_2^{16}+c_3^{16}).$$

Ganz analog bekommt man für die elfte Ableitung die Relation:

$$(48) \quad 9\frac{c_1^{XI}}{c_1'}-165\frac{c_1^{IX}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''}{c_1'}+990\frac{c_1^{VII}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^{2}}{c_1'^{2}}-2310\frac{c_1^{V}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^{3}}{c_1'^{3}}+1540\frac{c_1'''^{5}}{c_1'^{5}} =$$
$$= -16(c^8+c_2^8+c_3^8)(c_2^4+c_3^4)(c_3^4+c^4)(c^4-c_2^4).$$

16. Bildungsgesetz der Koeffizienten dieser Nullrelationen. — Die Nullrelationen zwischen $\vartheta_1(x)$ und seinen Ableitungen $(2n+1)$-ter Ordnung zeigen für $n \leqq 5$ eine überraschende Gesetzmäßigkeit hinsichtlich ihres Baues; diese tritt noch deutlicher zu Tage, wenn ich die Formeln (8), (9), (47,) (48) folgendermaßen schreibe:

$$(49) \qquad (-3)^1\frac{c_1^{V}}{c_1'}+1\cdot5\frac{c_1'''^{2}}{c_1'^{2}} = \sum_{\nu}\overline{P}_{\nu}^{(5)}$$

$$(50) \qquad (-3)^2\frac{c_1^{VII}}{c_1'}+(-3)^1\cdot7\cdot\binom{3}{1}\frac{c_1^{V}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''}{c_1'}+2\cdot7\cdot5\frac{c_1'''^{3}}{c_1'^{3}} = \sum_{\nu}\overline{P}_{\nu}^{(7)} \qquad (\nu=0,2,3)$$

$$(51)\quad (-3)^3\frac{c_1^{\mathrm{IX}}}{c_1'}+(-3)^2\cdot 9\cdot\binom{4}{1}\frac{c_1^{\mathrm{VII}}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''}{c_1'}+(-3)^1\cdot 9\cdot 7\cdot\binom{4}{2}\frac{c_1^{\mathrm{V}}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^2}{c_1'^2}+$$
$$+3\cdot 9\cdot 7\cdot 5\,\frac{c_1'''^4}{c_1'^4}=\sum_\nu \overline{P}_\nu^{(9)}$$
$$(\nu=0,2,3)$$

$$(52)\quad (-3)^4\frac{c_1^{\mathrm{XI}}}{c_1'}+(-3)^3\cdot 11\cdot\binom{5}{1}\frac{c_1^{\mathrm{IX}}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''}{c_1'}+(-3)^2\cdot 11\cdot 9\cdot\binom{5}{2}\frac{c_1^{\mathrm{VII}}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^2}{c_1'^2}+$$
$$+(-3)^1\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot\binom{5}{3}\frac{c_1^{\mathrm{V}}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^3}{c_1'^5}+4\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\,\frac{c_1'''^5}{c_1'^5}=\sum_\nu \overline{P}_\nu^{(11)},$$

wobei die Ausdrücke auf den rechten Seiten folgende Werte haben:

$$\overline{P}^{(5)}=2c_2^4c_3^4,\quad \overline{P}^{(7)}=8c_2^4c_3^4(c_2^4+c_3^4),\quad \overline{P}^{(9)}=-84c_2^4c_3^4(c_2^4+c_3^4)^2+444(c_2^4c_3^4)^2,$$
$$\overline{P}^{(11)}=-240c_2^4c_3^4(c_2^4+c_3^4)^3+1248(c_2^4c_3^4)^2(c_2^4+c_3^4),$$
$$\overline{P}_2^{(5)}=2c_3^4c^4,\quad \overline{P}_2^{(7)}=-8c_3^4c^4(c_3^4+c^4),\quad \overline{P}_2^{(9)}=-84c_3^4c^4(c_3^4+c^4)^2+444(c_3^4c^4)^2,$$
$$\overline{P}_2^{(11)}=240c_3^4c^4(c_3^4+c^4)^3-1248(c_3^4c^4)^2(c_3^4+c^4),$$
$$\overline{P}_3^{(5)}=-2c^4c_2^4,\quad \overline{P}_3^{(7)}=-8c^4c_2^4(c^4-c_2^4),\quad \overline{P}_3^{(9)}=84c^4c_2^4(c^4-c_2^4)^2+444(c^4c_2^4)^2,$$
$$\overline{P}_3^{(11)}=240c^4c_2^4(c^4-c_2^4)^3+1248(c^4c_2^4)^2(c^4-c_2^4).$$

Aus dieser Darstellungsart geht nun unmittelbar hervor, daß für $2\leqq n\leqq 5$ die in Frage stehenden Relationen die Form haben:

$$53)\quad \left\{\begin{array}{l}(-3)^{n-1}\dfrac{c_1^{(2n+1)}}{c_1'}+\displaystyle\sum_{m=1}^{n-2}(-3)^{n-m-1}(2n+1)(2n-1)\cdots(2n-2m+3)\binom{n}{m}\frac{c_1^{(2n-2m+1)}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^m}{c_1'^m}+\\ \qquad+(n-1)(2n+1)(2n-1)\cdots 7\cdot 5\cdot\dfrac{c_1'''^n}{c_1'^n}=\displaystyle\sum_\nu \overline{P}_\nu^{(2n+1)}\\ \qquad\qquad(\nu=0,2,3)\end{array}\right.$$

und weiter, daß

$$(54)\quad \left\{\begin{array}{l}\overline{P}^{(2n+1)}=\displaystyle\sum_{m=1}^{k}\overline{K}_m^{(2n+1)}(c_2^4c_3^4)^m(c_2^4+c_3^4)^{n-2m}\\ \overline{P}_2^{(2n+1)}=\displaystyle\sum_{m=1}^{k}(-1)^n\overline{K}_m^{(2n+1)}(c_3^4c^4)^m(c_3^4+c^4)^{n-2m}\\ \overline{P}_3^{(2n+1)}=\displaystyle\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\overline{K}_m^{(2n+1)}(c^4c_2^4)^m(c^4-c_2^4)^{n-2m}\end{array}\right.\qquad\left(\begin{array}{l}k=\dfrac{n}{2},\quad n\text{ gerade}\\ k=\dfrac{n-1}{2},\quad n\text{ ungerade}\end{array}\right)$$

gesetzt werden kann, wobei

$$(55)\quad \overline{K}_1^{(5)}=2;\quad \overline{K}_1^{(7)}=8;\quad \overline{K}_1^{(9)}=-84,\ \overline{K}_2^{(9)}=444;\quad \overline{K}_1^{(11)}=-240,\ \overline{K}_2^{(11)}=1248$$

zu nehmen ist. In den Gleichungen (53), (54), (55) sind demnach die Nullrelationen zwischen $\vartheta_1(x)$ und seinen Ableitungen $(2n+1)$-ter Ordnung für $n=2,3,4,5$ vollständig enthalten.

17. Nullrelationen zwischen $\vartheta_1(x)$ und seinen Ableitungen $(2n+1)$-Ordnung für $n > 5$. — Ich behaupte nun, die Gleichungen (53) und (54) behalten ihre Gültigkeit, wenn n über 5 wächst, d. h. sie geben einen allgemeinen Ausdruck für die Nullrelationen zwischen $\vartheta_1(x)$ und seinen Ableitungen beliebiger Ordnung. Zum Beweise nehme ich an, die Gleichungen (53) und (54) seien richtig für die $(2n-3)$-te und $(2n-1)$-te Ableitung von $\vartheta_1(x)$, und zeige ihre Gültigkeit für die $(2n+1)$-te Ableitung[1]).

Es sei also sowohl

$$(56)\quad \left\{ \begin{array}{l} (-3)^{n-3}\dfrac{c_1^{(2n-3)}}{c_1'} + \sum\limits_{m=1}^{n-4}(-3)^{n-m-3}(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2m-1\binom{n-2}{m}\dfrac{c_1^{(2n-2m-3)}}{c_1'}\cdot\dfrac{c_1'^{m}}{c_1'^{m}} + \\ \qquad + (n-3)(2n-3)(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot\dfrac{c_1'^{n-2}}{c_1'^{n-2}} = \sum\limits_{\nu}\overline{P}_{\nu}^{(2n-3)}, \\ \qquad\qquad (\nu = 0, 2, 3) \end{array} \right.$$

wo

$$(57)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \overline{P}^{(2n-3)} = \sum\limits_{m=1}^{k-1} & \overline{K}_m^{(2n-3)}(c_2^4 c_3^4)^m (c_2^4 + c_3^4)^{n-2m-2} \\ \overline{P}_2^{(2n-3)} = \sum\limits_{m=1}^{k-1}(-1)^{n-2} & \overline{K}_m^{(2n-3)}(c_3^4 c^4)^m (c_3^4 + c^4)^{n-2m-2} \\ \overline{P}_3^{(2n-3)} = \sum\limits_{m=1}^{k-1}(-1)^m & \overline{K}_m^{(2n-3)}(c^4 c_2^4)^m (c^4 - c_2^4)^{n-2m-2} \end{array} \right. \qquad \left(\begin{array}{ll} k = \dfrac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ k = \dfrac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{array} \right),$$

als auch

$$(58)\quad \left\{ \begin{array}{l} (-3)^{n-2}\dfrac{c_1^{(2n-1)}}{c_1'} + \sum\limits_{m=1}^{n-3}(-3)^{n-m-2}(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2m+1)\binom{n-1}{m}\dfrac{c_1^{(2n-2m-1)}}{c_1'}\cdot\dfrac{c_1'^{m}}{c_1'^{m}} + \\ \qquad + (n-2)(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot\dfrac{c_1'^{n-1}}{c_1'^{n-1}} = \sum\limits_{\nu}\overline{P}_{\nu}^{(2n-1)}, \\ \qquad\qquad (\nu = 0, 2, 3) \end{array} \right.$$

wo

$$(59)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \overline{P}^{(2n-1)} = \sum\limits_{m=1}^{k_1} & \overline{K}_m^{(2n-1)}(c_2^4 c_3^4)^m (c_2^4 + c_3^4)^{n-2m-1} \\ \overline{P}_2^{(2n-1)} = \sum\limits_{m=1}^{k_1}(-1)^{n-1} & \overline{K}_m^{(2n-1)}(c_3^4 c^4)^m (c_3^4 + c^4)^{n-2m-1} \\ \overline{P}_3^{(2n-1)} = \sum\limits_{m=1}^{k_1}(-1)^m & \overline{K}_m^{(2n-1)}(c^4 c_2^4)^m (c^4 - c_2^4)^{n-2m-1} \end{array} \right. \qquad \left(\begin{array}{ll} k_1 = \dfrac{n-2}{2}, & n \text{ gerade} \\ k_1 = \dfrac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{array} \right).$$

Ich nehme nun auf beiden Seiten der Gleichung (58) die Ableitung bezüglich q, drücke darauf mittels der Differentialgleichung (25) alles wieder durch

1) Vgl. Nr. **12**, wo es sich um den Beweis der analogen Relationen für die geraden Thetas gehandelt hat.

Ableitungen nach der Variabeln x aus und multipliziere mit 3. Dadurch erhalte ich

$$
(60)\quad \left\{\begin{aligned}
&(-3)^{n-1}\frac{c_1^{(2n+1)}}{c_1'}+3\cdot(-3)^{n-2}\frac{c_1^{(2n-1)}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''}{c_1'}+\sum_{m=1}^{n-3}(-3)^{n-m-1}\cdot(2n-1)(2n-3)\cdots\\
&\quad\cdots(2n-2m+1)\binom{n-1}{m}\frac{c_1^{(2n-2m+1)}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^m}{c_1'^m}+\sum_{m=1}^{n-3}(-3)^{n-m-2}\cdot(2n-1)(2n-3)\cdots\\
&\quad\cdots(2n-2m+1)\cdot 3\cdot(m+1)\binom{n-1}{m}\frac{c_1^{(2n-2m-1)}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^{m+1}}{c_1'^{m+1}}-(2n-1)(2n-3)\cdots\\
&\quad\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot(n-1)(n-2)\frac{c_1^{V}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^{n-2}}{c_1'^{n-2}}+(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\,(n-1)(n-2)\frac{c_1'''^n}{c_1'^n}+\\
&\quad+\sum_{m=1}^{n-3}(-3)^{n-m-1}\cdot(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2m+1)\cdot m\cdot\binom{n-1}{m}\frac{c_1^{(2n-2m-1)}}{c_1'}\cdot\frac{c_1^{V}}{c_1'}\cdot\frac{c_1'''^{m-1}}{c_1'^{m-1}}=\sum_{\nu}\overline{Q}_\nu^{(2n+1)},
\end{aligned}\right.
$$

wenn mit $\overline{Q}_\nu^{(2n+1)}$ der Ausdruck bezeichnet wird, in den $\overline{P}_\nu^{(2n-1)}$ durch diese Operation übergeht. Bedenke ich, daß die Formeln bestehen

$$
(61)\quad \left\{\begin{aligned}
3\frac{\partial}{\partial q}c_2^4c_3^4 &= 4c_2^4c_3^4(c_2^4+c_3^4)-8c_2^4c_3^4\frac{c_1'''}{c_1'}, & 3\frac{\partial}{\partial q}(c_2^4+c_3^4) &= -4(c_2^4+c_3^4)^2+24c_2^4c_3^4-4(c_2^4+c_3^4)\frac{c_1'''}{c_1'}\\
3\frac{\partial}{\partial q}c_3^4c^4 &= -4c_3^4c^4(c_3^4+c^4)-8c_3^4c^4\frac{c_1'''}{c_1'}, & 3\frac{\partial}{\partial q}(c_3^4+c^4) &= 4(c_3^4+c^4)^2-24c_3^4c^4-4(c_3^4+c^4)\frac{c_1'''}{c_1'}\\
3\frac{\partial}{\partial q}c^4c_2^4 &= 4c^4c_2^4(c^4-c_2^4)-8c^4c_2^4\frac{c_1'''}{c_1'}, & 3\frac{\partial}{\partial q}(c^4-c_2^4) &= -4(c^4-c_2^4)^2-24c^4c_2^4-4(c^4-c_2^4)\frac{c_1'''}{c_1'},
\end{aligned}\right.
$$

so ergeben sich für $\overline{Q}_\nu^{(2n+1)}$ die Werte

$$
(62)\quad \left\{\begin{aligned}
\overline{Q}^{(2n+1)} &= \sum_{m=1}^{k}\ [-4(n-3m-1)\overline{K}_m^{(2n-1)}+24(n-2m+1)\overline{K}_{m-1}^{(2n-1)}](c_2^4c_3^4)^m(c_2^4+c_3^4)^{n-2m}-4(n-1)\frac{c_1'''}{c_1'}\cdot\overline{P}^{(2n-1)}\\
\overline{Q}_2^{(2n+1)} &= \sum_{m=1}^{k}(-1)^n[-4(n-3m-1)\overline{K}_m^{(2n-1)}+24(n-2m+1)\overline{K}_{m-1}^{(2n-1)}](c_3^4c^4)^m(c_3^4+c^4)^{n-2m}-4(n-1)\frac{c_1'''}{c_1'}\cdot\overline{P}_2^{(2n-1)}\\
\overline{Q}_3^{(2n+1)} &= \sum_{m=1}^{k}(-1)^m[-4(n-3m-1)\overline{K}_m^{(2n-1)}+24(n-2m+1)\overline{K}_{m-1}^{(2n-1)}](c^4c_2^4)^m(c^4-c_2^4)^{n-2m}-4(n-1)\frac{c_1'''}{c_1'}\cdot\overline{P}_3^{(2n-1)},
\end{aligned}\right.
$$

wo zu den früheren Bedingungen

$$
k=\frac{n}{2},\ n\text{ gerade},\qquad k=\frac{n-1}{2},\ n\text{ ungerade}
$$

noch die Festsetzung hinzukommt

$$
(63)\qquad \overline{K}_\varkappa^{(2\lambda+1)}=0,\ \text{wenn}\ \varkappa\leqq 0\ \text{oder wenn}\ 2\varkappa>\lambda.
$$

Setze ich im Hinblick auf die Ausdrücke (62) für $\overline{Q}_\nu^{(2n+1)}$:

$$(64)\quad \begin{cases} \overline{R}^{(2n+1)} = \sum_{m=1}^{k} [-4(n-3m-1)\,\overline{K}_m^{(2n-1)} + 24(n-2m+1)\,\overline{K}_{m-1}^{(2n-1)}]\,(c_2^4 c_3^4)^m (c_2^4 + c_3^4)^{n-2m} \\ \overline{R}_2^{(2n+1)} = \sum_{m=1}^{k} (-1)^n [-4(n-3m-1)\,\overline{K}_m^{(2n-1)} + 24(n-2m+1)\,\overline{K}_{m-1}^{(2n-1)}]\,(c_3^4 c^4)^m (c_3^4 + c^4)^{n-2m} \\ \overline{R}_3^{(2n+1)} = \sum_{m=1}^{k} (-1)^m [-4(n-3m-1)\,\overline{K}_m^{(2n-1)} + 24(n-2m+1)\,\overline{K}_{m-1}^{(2n-1)}]\,(c^4 c_2^4)^m (c^4 - c_2^4)^{n-2m}, \end{cases}$$

so läßt sich die Relation (60) unter Beachtung von (58) in folgender Form schreiben

$$(65)\quad \begin{cases} (-3)^{n-1} \frac{c_1^{(2n+1)}}{c_1'} + (-3)^{n-2}[3+(n-1)(2n+3)] \frac{c_1^{(2n-1)}}{c_1'} \cdot \frac{c_1'''}{c_1'} + \sum_{m=2}^{n-3} (-3)^{n-m-1} \cdot (2n-1)(2n-3)\cdots \\ \quad \cdots (2n-2m+3)\left[(2n-2m+1)\binom{n-1}{m} + (4n+3m-4)\binom{n-1}{m-1}\right] \frac{c_1^{(2n-2m+1)}}{c_1'} \cdot \frac{c_1'''^m}{c_1'^m} - \\ \quad - 3(2n-1)(2n-3)\cdots 9\cdot 7\cdot \left[5(n-2)(n-1) + (7n-10)\binom{n-1}{n-3}\right] \frac{c_1^{V}}{c_1'} \cdot \frac{c_1'''^{n-2}}{c_1'^{n-2}} + \\ \quad + (2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 7\cdot (n-2)(n-1) \frac{c_1'''^n}{c_1'^n} + \sum_{m=1}^{n-3} (-3)^{n-m-1} \cdot (2n-1)(2n-3)\cdots \\ \quad \cdots (2n-2m+1)\, m \cdot \binom{n-1}{m} \frac{c_1^{(2n-2m-1)}}{c_1'} \cdot \frac{c_1^{V}}{c_1'} \cdot \frac{c_1'''^{m-1}}{c_1'^{m-1}} = \sum_{\nu} \overline{R}_\nu^{(2n+1)}. \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung will ich die Glieder von der Form $\frac{c_1^{(2n-2m-1)}}{c_1'} \cdot \frac{c_1^{V}}{c_1'} \cdot \frac{c_1'''^{m-1}}{c_1'^{m-1}}$ eliminieren. Zu dem Zweck multipliziere ich die Gleichungen (56) und (49) miteinander und mit $(n-1)(2n-1)$ und subtrahiere die so erhaltene Beziehung von (65). Alsdann erhalte ich, unter Uebergehung von Zwischenrechnungen, die denen in Nr. **12** ganz analog sind:

$$(66)\quad \begin{cases} (-3)^{n-1} \frac{c_1^{(2n+1)}}{c_1'} + \sum_{m=1}^{n-2} (-3)^{n-m-1} \cdot (2n+1)(2n-1)\cdots(2n-m+3) \binom{n}{m} \frac{c_1^{(2n-2m+1)}}{c_1'} \cdot \frac{c_1'''^m}{c_1'^m} + \\ \quad + (n-1)(2n+1)(2n-1)\cdots 7\cdot 5\cdot \frac{c'''^n}{c_1'^n} = \sum_{\nu} \overline{R}_\nu^{(2n+1)} - (n-1)(2n-1) \sum_{\nu} \overline{P}_\nu^{(2n-3)} \cdot \sum_{\nu} \overline{P}_\nu^{(5)}. \\ \qquad\qquad (\nu = 0, 2, 3) \end{cases}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat also in der Tat die Gestalt von (53).

Ich gehe nunmehr zur Untersuchung der rechten Seite über. Wie man leicht nachweisen kann, gilt für $\sum_{\nu} \overline{P}_\nu^{(5)}$ jede der folgenden Darstellungen

$$(67)\qquad \sum_{\nu} \overline{P}_\nu^{(5)} = (c_2^4 + c_3^4)^2 - 3 c_2^4 c_3^4 = (c_3^4 + c^4)^2 - 3 c_3^4 c^4 = (c^4 - c_2^4)^2 + 3 c^4 c_2^4,$$

mit deren Hülfe sich $\overline{P}_\nu^{(2n-3)} \cdot \sum_{\nu} \overline{P}_\nu^{(5)}$ unter Berücksichtigung der Gleichung (57) folgendermaßen schreiben läßt:

$$(68)\quad \begin{cases} \overline{P}^{(2n-3)} \cdot \sum\limits_{\nu} \overline{P}_{\nu}^{(5)} = \sum\limits_{m=1}^{k} [2\,\overline{K}_{m}^{(2n-3)} - 6\,\overline{K}_{m-1}^{(2n-3)}]\,(c_2^4 c_3^4)^m\,(c_2^4 + c_3^4)^{n-2m} \\ \overline{P}_{2}^{(2n-3)} \cdot \sum\limits_{\nu} \overline{P}_{\nu}^{(5)} = \sum\limits_{m=1}^{k} (-1)^n\,[2\,\overline{K}_{m}^{(2n-3)} - 6\,\overline{K}_{m-1}^{(2n-3)}]\,(c_3^4 c^4)^m\,(c_3^4 + c^4)^{n-2m} \\ \overline{P}_{3}^{(2n-3)} \cdot \sum\limits_{\nu} \overline{P}_{\nu}^{(5)} = \sum\limits_{m=1}^{k} (-1)^m\,[2\,\overline{K}_{m}^{(2n-3)} - 6\,\overline{K}_{m-1}^{(2n-3)}]\,(c^4 c_2^4)^m\,(c^4 - c_2^4)^{n-2m}, \end{cases}$$

wobei für k und $\overline{K}_{\varkappa}^{(2\lambda+1)}$ wieder die üblichen Festsetzungen bestehen. Setzt man

$$(69)\qquad \overline{P}_{\nu}^{(2n+1)} = \overline{R}_{\nu}^{(2n+1)} - (n-1)(2n-1)\,\overline{P}_{\nu}^{(2n-3)} \cdot \sum_{\nu} \overline{P}_{\nu}^{(5)}, \qquad (\nu = 0, 2, 3)$$

so hat die rechte Seite von (66) die Form $\sum\limits_{\nu} \overline{P}_{\nu}^{(2n+1)}$. Hiermit ist der gewünschte Beweis erbracht.

18. Zusammenstellung der Resultate betreffend Nullrelationen für die ungerade Thetafunktion. — Aus den Entwicklungen der vorigen Nr. folgt:

Theorem (B): Zwischen $\vartheta_1(x)$ und seinen Ableitungen $(2n+1)$-ter Ordnung $(n > 1)$ besteht für das Argument Null die Relation[1])

$$(70)\quad \begin{cases} (-3)^{n-1}\,\dfrac{c_1^{(2n+1)}}{c_1'} + \sum\limits_{m=1}^{n-2} (-3)^{n-m-1} \cdot (2n+1)(2n-1)\cdots(2n-2m+3) \binom{n}{m} \dfrac{c_1^{(2n-2m+1)}}{c_1'} \cdot \dfrac{c_1'''^m}{c_1'^m} + \\ \qquad + (n-1)(2n+1)(2n-1)\cdots 7\cdot 5 \cdot \dfrac{c_1'''^n}{c_1'^n} = \sum\limits_{\nu} \overline{P}_{\nu}^{(2n+1)}, \\ \qquad\qquad (\nu = 0, 2, 3) \end{cases}$$

wo

$$(70\,a)\quad \begin{cases} \overline{P}^{(2n+1)} = \sum\limits_{m=1}^{k} \overline{K}_{m}^{(2n+1)}\,(c_2^4 c_3^4)^m\,(c_2^4 + c_3^4)^{n-2m} \\ \overline{P}_{2}^{(2n+1)} = \sum\limits_{m=1}^{k} (-1)^n\,\overline{K}_{m}^{(2n+1)}\,(c_3^4 c^4)^m\,(c_3^4 + c^4)^{n-2m} \\ \overline{P}_{3}^{(2n+1)} = \sum\limits_{m=1}^{k} (-1)^m\,\overline{K}_{m}^{(2n+1)}\,(c^4 c_2^4)^m\,(c^4 - c_2^4)^{n-2m} \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} k = \dfrac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ k = \dfrac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{matrix} \right).$$

Für die Koeffizienten gelten dabei für $n > 3$ die Rekursionsformeln

$$(71)\quad \overline{K}_{m}^{(2n+1)} = -4(n-3m-1)\,\overline{K}_{m}^{(2n-1)} + 24(n-2m+1)\,\overline{K}_{m-1}^{(2n-1)} - \\ - 2(n-1)(2n-1)\,\overline{K}_{m}^{(2n-3)} + 6(n-1)(2n-1)\,\overline{K}_{m-1}^{(2n-3)}$$

---

1) Die rechte Seite dieser Relation, also $\sum\limits_{\nu} \overline{P}_{\nu}^{(2n+1)}$, läßt sich rational durch die Invarianten g_2 und g_3 der elliptischen Funktionen ausdrücken. So ist beispielsweise

$$\sum_{\nu} \overline{P}_{\nu}^{(5)} = \frac{3}{2}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^4 g_2, \quad \sum_{\nu} \overline{P}_{\nu}^{(7)} = -54\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^6 g_3, \quad \sum_{\nu} \overline{P}_{\nu}^{(9)} = \frac{243}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^8 g_2^2, \quad \sum_{\nu} \overline{P}_{\nu}^{(11)} = -1458\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{10} g_2 g_3.$$

mit der Bedingung

(71 a) $$\overline{K}_{\varkappa}^{(2\lambda+1)} = 0, \text{ wenn } \varkappa \leqq 0 \text{ oder } 2\varkappa > \lambda.$$

Zahlenwerte der $\overline{K}_{m}^{(2n+1)}$ bis $n = 9$.

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 2$	2			
$n = 3$	8			
$n = 4$	− 84	444		
$n = 5$	− 240	1248		
$n = 6$	11160	− 88848	176472	
$n = 7$	− 96480	764352	− 1562976	
$n = 8$	− 799920	11053872	− 50503824	73665936
$n = 9$	42240960	− 490250880	1907997120	− 2520916992.

Lebenslauf.

Am 11. September 1885 wurde ich, Alfred Baruch, evangelischer Konfession, zu Berlin als Sohn des Kaufmanns Baruch und seiner Ehefrau, geb. Gill, geboren.

Den ersten Unterricht empfing ich auf der Volksschule, darauf besuchte ich die I. und III. Realschule und zuletzt die Friedrichs-Werdersche Oberrealschule zu Berlin, die ich Michaelis 1904 mit dem Zeugnis der Reife verließ. — Von Michaelis 1904 bis Michaelis 1908 widmete ich mich an der Friedrich-Wilhelms-Universität und der Technischen Hochschule zu Berlin vorzugsweise dem Studium der reinen und angewandten Mathematik und der Physik.

Ich besuchte Vorlesungen und Uebungen folgender Herren Professoren und Dozenten: Fleischer, Frischeisen-Köhler, Hettner, Jahnke, Jolles, Knoblauch, Lampe, Landau, Lehmann-Filhés, Münch, Paulsen †, Planck, E. Pringsheim, Riehl, Rubens, Scheffers, Schottky, Schur, H. A. Schwarz, Stumpf, Zimmermann, Zühlke. Allen meinen hochverehrten Lehrern spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus.

Am 8. Juni 1909 bestand ich die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen und wurde zur Ableistung des Seminarjahres dem Luisenstädtischen Realgymnasium zu Berlin überwiesen.

Das Rigorosum fand am 3. Mai 1910 statt.